16. előadás

Kétváltozós integrálás

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet, Geometria Tanszék

2022. április 26.

Téglalapon

$T = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1, 2 \le y \le 3\}$ téglalap
$f(x, y) = x^2 y$ függvényt integráljuk a T téglalapon:

$$\iint_T f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_0^1 \int_2^3 x^2 y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{5}{2}x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{5}{2}\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{5}{6},$$

mert

$$\int_2^3 x^2 y\,\mathrm{d}y = \left[x^2\frac{y^2}{2}\right]_2^3 = \frac{9}{2}x^2 - \frac{4}{2}x^2 = \frac{5}{2}x^2$$

Ugyanez fordítva:

$$\iint_T f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_2^3 \int_0^1 x^2 y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

Téglalapon

$T = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, 2 \leq y \leq 3\}$ téglalap
$f(x,y) = x^2 y$ függvényt integráljuk a T téglalapon:

$$\iint_T f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_0^1 \int_2^3 x^2 y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{5}{2}x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{5}{2}\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{5}{6},$$

mert

$$\int_2^3 x^2 y\,\mathrm{d}y = \left[x^2\frac{y^2}{2}\right]_2^3 = \frac{9}{2}x^2 - \frac{4}{2}x^2 = \frac{5}{2}x^2$$

Ugyanez fordítva:

$$\iint_T f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_2^3 \int_0^1 x^2 y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_2^3 \frac{y}{3}\,\mathrm{d}y = \left[\frac{y^2}{6}\right]_2^3 = \frac{9}{6} - \frac{4}{6} = \frac{5}{6},$$

mert

$$\int_0^1 x^2 y\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}y\right]_0^1 = \frac{y}{3}$$

Fubini-tétel:
Az integrálásnál felcserélhető a változók sorrendje:

$$\int_0^1 \int_2^3 x^2 y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_2^3 \int_0^1 x^2 y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

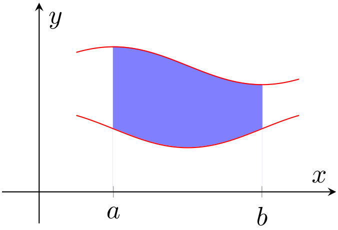
Normáltartomány

Normáltartomány:

$$N = \{(x, y) \mid a \le x \le b,\ f_1(x) \le y \le f_2(x)\}$$

Ekkor az $f(x, y)$ függvény integrálja ezen a normáltartományon:

$$\iint_N f(x, y)\,\mathrm{d}(x, y) = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$



Példa:

$$a = 1 \qquad f_1(x) = x^2 \qquad f(x, y) = xy$$
$$b = 3 \qquad f_2(x) = 4x$$

$$\int_1^3 \int_{x^2}^{4x} xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x =$$

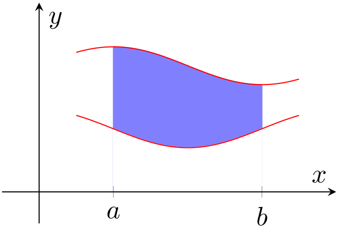
Normáltartomány

Normáltartomány:

$$N = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ f_1(x) \le y \le f_2(x)\}$$

Ekkor az $f(x,y)$ függvény integrálja ezen a normáltartományon:

$$\iint_N f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$



Példa:

$$a = 1 \qquad f_1(x) = x^2 \qquad f(x,y) = xy$$

$$b = 3 \qquad f_2(x) = 4x$$

$$\int_1^3 \int_{x^2}^{4x} xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_1^3 \left[x\frac{y^2}{2}\right]_{y=x^2}^{4x} \mathrm{d}x = \int_1^3 \left(x\frac{(4x)^2}{2} - x\frac{(x^2)^2}{2}\right) \mathrm{d}x =$$

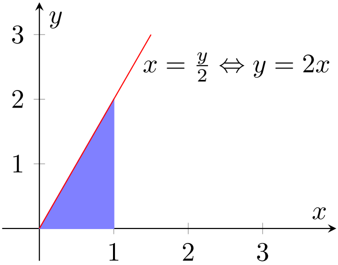
$$= \int_1^3 \left(8x^3 - \frac{x^5}{2}\right) \mathrm{d}x = \left[2x^4 - \frac{x^6}{12}\right]_1^3 =$$

$$= 162 - \frac{729}{12} - \left(2 - \frac{1}{12}\right) = \frac{298}{3}$$

Integrálcsere

$$\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = ?$$

Az e^{x^2} függvény primitív függvénye nem írható fel elemi függgvényekkel, így ezt így nem tudjuk kiszámolni. De az integrálás sorrendjét felcserélhetjük (határokra figyelni kell!):

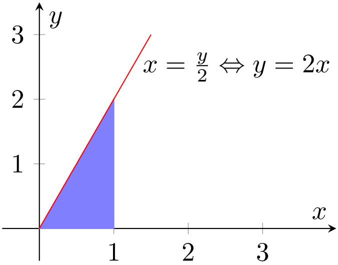


$$\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{2x} e^{x^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x =$$

Integrálcsere

$$\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = ?$$

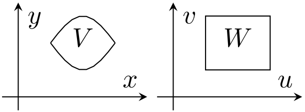
Az e^{x^2} függvény primitív függvénye nem írható fel elemi függggvényekkel, így ezt így nem tudjuk kiszámolni. De az integrálás sorrendjét felcserélhetjük (határokra figyelni kell!):



$$\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{2x} e^{x^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[e^{x^2} y\right]_{y=0}^{2x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 e^{x^2} \cdot 2x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[e^{x^2}\right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

Integráltranszformáció



Az x és y változók helyett új, u, v változókat vezetünk be:
$x(u,v)$
$y(u,v)$
V és W között kölcsönösen egyértelmű leképezés (az x, y legfeljebb véges számú értékének kivételével)

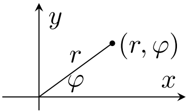
$$\iint_V f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_W f(x(u,v),y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

ahol a Jacobi-determináns abszolút értéke

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}\right|.$$

Tipikus példa: polárkoordináták:

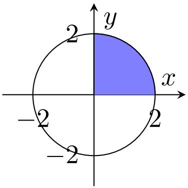
$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$



A Jacobi-determináns:

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi - (-r\sin^2\varphi) = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r$$

Példa



$A = \{(x, y) \mid 0 < x, 0 < y, x^2 + y^2 < 4\}$

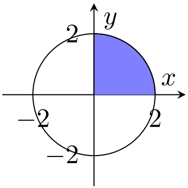
Integráljuk az A-n az $f(x, y) = xy$ függvényt.

$0 < r < 2$ és $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$

$$\iint\limits_A f(x, y)\,\mathrm{d}(x, y) = \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cos\varphi \cdot r\sin\varphi \cdot r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r =$$

Példa

$A = \{(x,y) \mid 0 < x, 0 < y, x^2+y^2 < 4\}$



Integráljuk az A-n az $f(x,y) = xy$ függvényt.

$0 < r < 2$ és $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$

$$\iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cos\varphi \cdot r\sin\varphi \cdot r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \cos\varphi \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r =$$

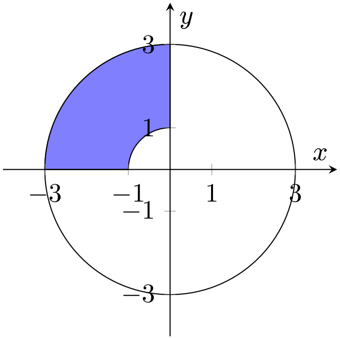
$$= \int_0^2 \left[r^3 \frac{\sin^2\varphi}{2} \right]_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}r = \int_0^2 r^3 \frac{1}{2}\,\mathrm{d}r = \left[\frac{r^4}{8} \right]_0^2 = 2$$

Feladat

$A = \{(x, y) \mid x < 0, 0 < y, 1 < x^2+y^2 < 9\}$

Integráljuk az A-n az $f(x, y) = 2x^2y$ függvényt.

Feladat



$$A = \{(x,y) \mid x < 0, 0 < y, 1 < x^2+y^2 < 9\}$$

Integráljuk az A-n az $f(x,y) = 2x^2y$ függvényt.

$1 < r < 3$ és $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$

$$\iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int\limits_1^3 \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2(r\cos\varphi)^2 \cdot r\sin\varphi \cdot r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \int\limits_1^3 \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2r^4\cos^2\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r =$$

$$= \int\limits_1^3 \left[2r^4\left(-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right)\right]_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathrm{d}r = \int\limits_1^3 2r^4\frac{1}{3}\,\mathrm{d}r = \left[\frac{2}{3}\frac{r^5}{5}\right]_1^3 = \frac{484}{15}$$

Tömegközéppont

Egy $A \in \mathbb{R}^2$ lemez tömege, ha $\varrho\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a sűrűségfüggvény:

$$m = \iint\limits_A \varrho(x, y)\,\mathrm{d}(x, y)$$

Homogén esetben vehetjük ϱ-t 1-nek, ekkor

$$m = \iint\limits_A 1\,\mathrm{d}(x, y)$$

A nyomatékok:

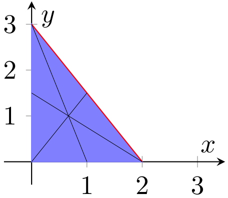
$$m_x = \iint\limits_A x\varrho(x, y)\,\mathrm{d}(x, y)$$

$$m_y = \iint\limits_A y\varrho(x, y)\,\mathrm{d}(x, y)$$

Ekkor a tömegközéppont koordinátái: $\left(\dfrac{m_x}{m}, \dfrac{m_y}{m}\right)$.

Példa

A $(0,0),(2,0),(0,3)$ csúcsú homogén háromszöglap tömegközéppontja.



$$m=\int_0^2\int_0^{3-\frac{3}{2}x}1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int_0^2 3-\frac{3}{2}x\,\mathrm{d}x=\left[3x-\frac{3}{2}\frac{x^2}{2}\right]_0^2=6-\frac{12}{4}=3$$

$$m_x=\int_0^2\int_0^{3-\frac{3}{2}x}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int_0^2 3x-\frac{3}{2}x^2\,\mathrm{d}x=\left[3\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\frac{12}{2}-\frac{24}{6}=2$$

$$m_y=\int_0^2\int_0^{3-\frac{3}{2}x}y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int_0^2\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{3-\frac{3}{2}x}\mathrm{d}x=\int_0^2\frac{1}{2}\left(3-\frac{3}{2}x\right)^2\mathrm{d}x=$$

$$=\int_0^2\frac{9}{2}-\frac{9}{2}x+\frac{9}{8}x^2\,\mathrm{d}x=\left[\frac{9}{2}x-\frac{9}{2}\frac{x^2}{2}+\frac{9}{8}\frac{x^3}{3}\right]_0^2=9-9+3=3$$

Így a tömegközéppont: $\left(\frac{m_x}{m},\frac{m_y}{m}\right)=\left(\frac{2}{3},\frac{3}{3}\right)=\left(\frac{2}{3},1\right)$