18. előadás

Sorozatok

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet, Geometria Tanszék

2022. május 3.

Definíció és tulajdonságok

Minden természetes számhoz hozzárendelünk egy valós számot.
$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

Példa:
$a_n = \frac{1}{n}$.
Általában a végtelenbeli határérték érdekel minket, tulajdonképpen a „végtelen megközelítése”.

Tulajdonságok (hasonlóan a függvényekhez):
alulról korlátos, ha létezik $k \in \mathbb{R}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \geq k$
felülről korlátos, ha létezik $K \in \mathbb{R}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq K$
korlátos, ha létezik $K \in \mathbb{R}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|a_n| \leq K$
legnagyobb alsó korlát $\inf a_n$
legkisebb felső korlát $\sup a_n$
monoton nő, ha $n < m$ esetén $a_n \leq a_m$
szigorúan monoton nő, ha $n < m$ esetén $a_n < a_m$
monoton csökken, ha $n < m$ esetén $a_n \geq a_m$
szigorúan monoton csökken, ha $n < m$ esetén $a_n > a_m$

Határérték

Csak a $+\infty$-ben vizsgáljuk!

Az a_n sorozat határértéke az $A \in \mathbb{R}$ szám, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $n \geq N$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$.
Jelölés: $a_n \to A$ vagy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

Az a_n sorozat határértéke a $+\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez létezik $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $n \geq N$ esetén $a_n > K$.
Jelölés: $a_n \to +\infty$ vagy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Az a_n sorozat határértéke a $-\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez létezik $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $n \geq N$ esetén $a_n < K$.
Jelölés: $a_n \to -\infty$ vagy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Egy sorozat konvergens, ha létezik $A \in \mathbb{R}$ határértéke.

Egy sorozat divergens, ha nem konvergens.

Ha egy sorozat határértéke 0, akkor nullsorozat.

Példa

$a_n = \dfrac{1}{n}$ határértéke 0, mert minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik N küszöbindex, hogy $n > N$ esetén $|a_n - 0| < \varepsilon$.

$$
\begin{aligned}
|a_n - A| &< \varepsilon \\
\left|\frac{1}{n} - 0\right| &< \varepsilon \\
\frac{1}{n} &< \varepsilon \\
\frac{1}{\varepsilon} &< n
\end{aligned}
$$

Tehát $N = \dfrac{1}{\varepsilon}$ jó küszöbindex ε-hoz.

Egy másik

$a_n = 2 - \frac{(-1)^n}{3^n}$ határértéke

Egy másik

$a_n = 2 - \frac{(-1)^n}{3^n}$ határértéke 2:

$$\begin{aligned}
|a_n - A| &< \varepsilon \\
\left|2 - \frac{(-1)^n}{3^n} - 2\right| &< \varepsilon \\
\left|-\frac{(-1)^n}{3^n}\right| &< \varepsilon \\
\frac{1}{3^n} &< \varepsilon \\
\frac{1}{\varepsilon} &< 3^n \\
\log_3\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) &< n
\end{aligned}$$

Tehát $N = \log_3\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ jó küszöbindex ε-hoz.

Egy harmadik

$a_n = n^2 + 3$ határértéke $+\infty$:

$$\begin{aligned} a_n &> K \\ n^2 + 3 &> K \\ n^2 &> K - 3 \\ n &> \sqrt{K-3} \end{aligned}$$

Tehát $N = \sqrt{K-3}$ jó küszöbindex K-hoz.

Műveletek és a határérték

Tétel:
Ha $a_n \to A$, $b_n \to B$, akkor

$$a_n + b_n \to A + B$$
$$a_n - b_n \to A - B$$
$$a_n b_n \to AB$$
$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{A}{B}, \quad \text{ha } b_n, B \neq 0$$
$$c a_n \to cA, \quad \text{ha } c \in \mathbb{R}$$

Példa:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2 + 7n - 9}{7n^2 - 3n + 1} =$$

Műveletek és a határérték

Tétel:
Ha $a_n \to A$, $b_n \to B$, akkor

$$\begin{aligned} a_n + b_n &\to A + B \\ a_n - b_n &\to A - B \\ a_n b_n &\to AB \\ \frac{a_n}{b_n} &\to \frac{A}{B}, \quad \text{ha } b_n, B \neq 0 \\ c a_n &\to cA, \quad \text{ha } c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Példa:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2 + 7n - 9}{7n^2 - 3n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{5 + \frac{7}{n} - \frac{9}{n^2}}{7 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{5}{7}$$

Nevezetes sorozatok

$$\frac{1}{n} \to 0$$

$$\frac{1}{n^a} \to 0, \text{ ha } a > 0$$

$$n^a \to +\infty, \text{ ha } a > 0$$

$$q^n \to \begin{cases} +\infty, & \text{ha } q > 1 \\ 1, & \text{ha } q = 1 \\ 0, & \text{ha } |q| < 1 \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{q} \to 1, \text{ ha } q > 0$$

$$\sqrt[n]{n} \to 1$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e}$$

$$\left(1 + \frac{q}{n}\right)^n \to e^q, \text{ ahol } q \in \mathbb{R}$$

Rendőrelv

Ha $a_n \le b_n \le c_n$ (ha $n \ge N$) és $a_n \to A$ és $c_n \to A$, akkor $b_n \to A$.

Példa:

$b_n = \sqrt[n]{2 + \frac{1}{n}}$

$$\begin{array}{ccccccc}
\sqrt[n]{2} & \le & \sqrt[n]{2+\frac{1}{n}} & \le & \sqrt[n]{3} & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \text{ha } n \to \infty \\
1 & \Rightarrow & 1 & \Leftarrow & 1 &
\end{array}$$

Kapcsolat a függvényhatárértékkel

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Átviteli elv:
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ ekvivalens azzal, hogy minden $x_n \to x_0$ sorozatra a $b_n = f(x_n)$ sorozat határértéke A.

Feladat

Mi a $\left(\frac{n+3}{n-1}\right)^{2n}$ sorozat határértéke?

Feladat

Mi a $\left(\dfrac{n+3}{n-1}\right)^{2n}$ sorozat határértéke?

$$\left(\frac{n+3}{n-1}\right)^{2n} = \left(\frac{1+\frac{3}{n}}{1-\frac{1}{n}}\right)^{2n} = \left(\frac{\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}}\right)^{2} \to \left(\frac{e^{3}}{e^{-1}}\right)^{2} = \left(e^{4}\right)^{2} = e^{8}$$

Egy másik megoldási módszer:

$$\left(\frac{n+3}{n-1}\right)^{2n} = \left(\frac{n-1}{n-1}+\frac{4}{n-1}\right)^{2n} = \left(\left(1+\frac{4}{n-1}\right)^{n-1}\right)^{\frac{2n}{n-1}} \to \left(e^{4}\right)^{2} = e^{8},$$

mert

$$\frac{2n}{n-1} = \frac{2}{1-\frac{1}{n}} = \frac{2}{1} = 2.$$