19. előadás

Numerikus sorok

Horváth Márton

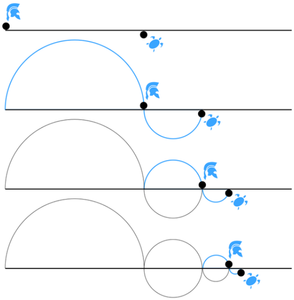
BME, Matematika Intézet, Geometria Tanszék

2022. május 9.

Bevezetés

Zénón paradoxonja:
Akhilleusz és a teknős

A gyorslábú Akhilleusz versenyt fut a lomha teknőssel, akinek egy kis előnyt ad. Zénón érvelése szerint így soha nem fogja utólérni, mert míg odaér ahonnan a teknős indult, a teknős már haladt valamit. De mire odaér, már megint nem lesz ott a teknős...



A kép a Wikipédiáról származik:
`https://en.wikipedia.org/wiki/File:Zeno_Achilles_Paradox.png`

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_N$$

Példa:

$$\sum_{n=1}^{5} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{137}{60}$$

Definíció

Ha a_n egy sorozat, akkor a $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ formális összeget numerikus sornak nevezzük.
Az N-edik részletösszeg:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_N$$

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \end{aligned}$$

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sort akkor nevezzük konvergensnek, ha a részletösszegek $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ sorozata konvergens. Ennek határértéke a sor összege:

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Példa

A $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ sor részletösszegei:

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \\ &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} = \\ &= 1 - \frac{1}{N+1} \end{aligned}$$

A sor összege ennek a határértéke:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = 1$$

Geometriai sor

A $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ sor részletösszegei:

$$S_N = \sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2-\left(\frac{1}{2}\right)^N,$$

melynek határértéke 2, ennyi a sor összege.

Általánosan $|q|<1$ esetén a $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1+q+q^2+\ldots$ sor részletösszegei:

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q},$$

melynek határértéke:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Hasonlóan kaphatjuk ($|q|<1$):

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} aq^n = \frac{aq}{1-q}$$

Feladatok

Tudjuk, hogy $|q| < 1$-re

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} aq^n = \frac{aq}{1-q}$$

Mennyi a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{6^n}$ sor összege?

Feladatok

Tudjuk, hogy $|q| < 1$-re

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} aq^n = \frac{aq}{1-q}$$

Mennyi a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{6^n}$ sor összege?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n = \frac{5}{1-\frac{1}{6}} = \frac{5}{\frac{5}{6}} = 6$$

Mennyi a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 5^{n+1}}{3^{2n-1}}$ sor összege?

Feladatok

Tudjuk, hogy $|q| < 1$-re

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} aq^n = \frac{aq}{1-q}$$

Mennyi a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{6^n}$ sor összege?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n = \frac{5}{1-\frac{1}{6}} = \frac{5}{\frac{5}{6}} = 6$$

Mennyi a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 5^{n+1}}{3^{2n-1}}$ sor összege?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 5^{n+1}}{3^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 5 \cdot 5^n}{3^{2n}/3} = \sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{5^n}{9^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 60 \left(\frac{5}{9}\right)^n =$$

$$= \frac{60 \cdot \frac{5}{9}}{1-\frac{5}{9}} = 60 \cdot \frac{\frac{5}{9}}{\frac{4}{9}} = 60 \cdot \frac{5}{4} = 75$$

Harmonikus sor

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergenciájának szükséges feltétele, hogy az a_n sorozat nullsorozat legyen (hiszen $a_n = S_n - S_{n-1}$). De ez nem elégséges:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \dots}_{\geq \frac{1}{2}}$$

Tehát $S_{2^k} \geq k\frac{1}{2}$, így $\lim_{N\to\infty} S_N = +\infty$, azaz ez a sor divergens.

Cauchy-féle integrálkritérium:
Ha az $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ függvény monoton csökken és pozitív, akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ sor konvergens} \iff \int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ improprius integrál konvergens}$$

Ennek egy következménye:

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ sor pontosan akkor konvergens, ha $a > 1$.

Például: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Pozitív tagú sorok

Egy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor pozitív tagú sor, ha $a_n \geq 0$.

Pozitív tagú sorok esetén módszerek a konvergencia eldöntésére:

- majoráns kritérium
- minoráns kritérium
- gyökkritérium
- hányadoskritérium

Majoráns kritérium

Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sorokra $0 \leq a_n \leq b_n$ teljesül ($n \geq N$ esetén) és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is konvergens.

Példa:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^3+3}$ sor konvergens?

$\frac{2n}{n^3+3} \approx \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2}$, így talán konvergens.

Majoráns kritérium:

$$a_n = \frac{2n}{n^3+3} \leq \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2} = b_n \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ konvergens}$$

Tehát $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^3+3}$ is konvergens.

Minoráns kritérium

Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sorokra $0 \le a_n \le b_n$ teljesül ($n \ge N$ esetén) és $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ is divergens.

Példa:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$ sor konvergens?

$\frac{n^2}{n^3+1} \approx \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$, így valószínűleg divergens.

Minoráns kritérium:

$$b_n = \frac{n^2}{n^3+1} \ge \frac{n^2}{2n^3} = \frac{1}{2n} = a_n \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergens}$$

Tehát $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$ is divergens.

Gyökkritérium

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitív tagú sor esetén

$$\text{ha } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \begin{cases} < 1, & \text{akkor } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens} \\ > 1, & \text{akkor } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergens} \end{cases}$$

Ha a határérték nem létezik, vagy éppen 1, akkor ez a kritérium nem mond semmit sem.

Példa:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ sor konvergens?

$a_n = \frac{n}{3^n}$, így

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n}{3^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{3^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{3} \to \frac{1}{3} < 1$$

Tehát a gyökkritérium szerint a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ sor konvergens.

Hányadoskritérium

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitív tagú sor esetén

$$\text{ha } \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \begin{cases} < 1, & \text{akkor } \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens} \\ > 1, & \text{akkor } \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergens} \end{cases}$$

Ha a határérték nem létezik, vagy éppen 1, akkor nem mond semmit sem.

Példa:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$ sor konvergens?

$a_n = \frac{n!}{2^n}$ és $a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{2^{n+1}}$, így

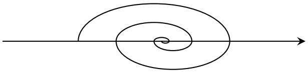
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}}{\frac{n!}{2^n}} = \frac{(n+1)!}{n!} \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{n+1}{2} \to +\infty > 1$$

Tehát a hányadoskritérium szerint a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$ sor divergens.

Leibniz-sorok

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor Leibniz-típusú vagy Leibniz-sor, ha

- a_n alternáló (váltakozó előjelű)
- $a_n \to 0$
- $|a_n|$ monoton csökken



Tétel:
Minden Leibniz-sor konvergens.

Példa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots$$

Teljesülnek rá a feltételek:

- a_n alternáló: igen $((-1)^n)$
- $a_n = \frac{(-1)^n}{n} \to 0$
- $|a_n| = \frac{1}{n}$ monoton csökken

Tehát Leibniz-sor, így konvergens.

Abszolút és feltételesen konvergens sorok

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor abszolút konvergens, ha a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sor konvergens.

Tétel:
Minden abszolút konvergens sor konvergens.

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor feltételesen konvergens, ha konvergens, de nem abszolút konvergens.

Példa:
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ sor konvergens (Leibniz), de nem abszolút konvergens:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

ami divergens.

Feltételesen konvergens sor átrendezése

Tekintsük a következő sort:

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \dots$$

Részletösszegek:

$$1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{8}, 0, \dots$$

Ennek a határértéke 0.

Ugyanez a sor kicsit átrendezve:

$$-1 + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \dots$$

Ekkor a részletösszegek:

$$-1, 0, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, -1, -\frac{3}{4}, -\frac{7}{8}, -1, \dots$$

Ekkor a határérték -1.