20. előadás

Hatványsorok

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet, Geometria Tanszék

2022. május 10.

Függvénysorok

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ numerikus sor általánosítása: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ függvénysor

Ennek a részletösszege: $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$, mely bizonyos x-ekre konvergens, bizonyosokra divergens. Azon x-ek halmaza, melyre konvergens a konvergenciatartomány. A sor összege:

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

Példa: $f_n(x) = x^n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + x^2 + x^3 + \dots$$

A részletösszegek:

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} x^n = x\frac{1-x^N}{1-x},$$

ami pontosan akkor konvergens, ha $|x| < 1$, tehát a konvergenciatartomány $(-1, 1)$

A sor összege:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \lim_{N\to\infty} S_N(x) = x\frac{1}{1-x}$$

Hatványsorok

A függvénysorok speciális esete, mikor $f_n(x) = a_n x^n$, így a sor a következő:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Ezt hatványsornak nevezzük.

Cauchy–Hadamard-tétel

A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor konvergenciasugara $r = \dfrac{1}{\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$, és

- $|x| < r$ esetén a hatványsor abszolút konvergens,
- $|x| > r$ esetén divergens.

A konvergenciatartomány $(-r, r), (-r, r], [-r, r), [-r, r]$ közül valamelyik.

Ha $\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, akkor $r = 0$, azaz csak $x = 0$-ban konvergens.

Ha $\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, azaz $r = \infty$, akkor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens a hatványsor.

A konvergenciasugarat másképpen is kiszámíthatjuk:

$$r = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

Példa

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ esetén $a_n = 1$, így

$$r = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|1|}} = \frac{1}{1} = 1$$

$x = 1$ esetén $\sum_{n=0}^{\infty} 1^n$ divergens,
$x = -1$ esetén

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{ha } N \text{ páros} \\ 0, & \text{ha } N \text{ páratlan} \end{cases}$$

így $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ szintén divergens.

A konvergenciatartomány: $(-1, 1)$.

Feladat

Állapítsuk meg a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n$ hatványsor konvergenciatartományát.

Feladat

Állapítsuk meg a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n$ hatványsor konvergenciatartományát.

$a_n = \frac{n}{2^n}$, így $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n}{2^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2}$.

Tehát $r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = 2$.

$x = 2$ esetén: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} 2^n = \sum_{n=0}^{\infty} n$, ami divergens.

$x = -2$ esetén: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} (-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n(-1)^n$, ami szintén divergens.

A konvergenciaintervallum: $(-2, 2)$.

Még egy feladat

Állapítsuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n}$ hatványsor konvergenciatartományát.

Még egy feladat

Állapítsuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n}$ hatványsor konvergenciatartományát.

A hatványsor: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} x^n$

$a_n = \frac{3^n}{n}$, így $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{3^n}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\sqrt[n]{n}} = 3$, azaz $r = \frac{1}{3}$.

$x = \frac{1}{3}$ esetén: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, ami divergens.

$x = -\frac{1}{3}$ esetén: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, ami Leibniz-sor:

- váltakozó előjelű
- $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ nullához tart
- $|a_n| = \frac{1}{n}$ monoton csökkenő

A konvergenciaintervallum: $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Általánosabb hatványsor

x_0 körüli haványsor ($x_0 \in \mathbb{R}$):

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

Cauchy-Hadamard-tétel hasonló:

A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ hatványsor konvergenciasugara: $r = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$, és

- $|x - x_0| < r$ esetén a hatványsor abszolút konvergens,
- $|x - x_0| > r$ esetén divergens.

A konvergenciaintervallum az alábbiak egyike:

- $(x_0 - r, x_0 + r)$
- $(x_0 - r, x_0 + r]$
- $[x_0 - r, x_0 + r)$
- $[x_0 - r, x_0 + r]$

Példa/feladat

Állapítsuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^2}$ hatványsor konvergenciatartományát.

Példa/feladat

Állapítsuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^2}$ hatványsor konvergenciatartományát.

$x_0 = 3$ és $a_n = \frac{1}{n^2}$, így

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^2}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} = 1,$$ azaz $r = 1$.

$x = 3 + 1 = 4$ esetén: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4-3)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, ami konvergens.

$x = 3 - 1 = 2$ esetén: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-3)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, ami Leibniz-sor:

- váltakozó előjelű
- $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ nullához tart
- $|a_n| = \frac{1}{n^2}$ monoton csökkenő

Mivel $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergens, ezért $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ abszolút konvergens, így konvergens.
A konvergenciaintervallum: $[2, 4]$.

És még egy

Állapítsuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n!}$ hatványsor konvergenciatartományát.

És még egy

Állapítsuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n!}$ hatványsor konvergenciatartományát.

$x_0 = -2$ és $a_n = \frac{1}{n!}$, ekkor a hányadost számoljuk:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n!(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

így $r = +\infty$. Ez azt jelenti, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens a hatványsor.

Deriválhatóság

A hatványsorokat a konvergenciaintervallum belsejében lehet tagonként deriválni.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

Példa:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)'$$

$$-\frac{1}{(1-x)^2}(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

Integrálhatóság

A hatványsorokat a konvergenciaintervallum belsejében lehet tagonként integrálni.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$$

Példa:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n\,\mathrm{d}t$$

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$