3. előadás

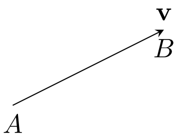
Vektorok

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet, Geometria Tanszék

2022. február 21.

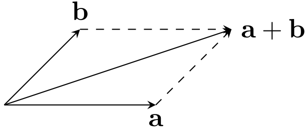
Van két pontunk a síkon/térben: A, B.
Az általuk meghatározott vektor:
$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$ (kézírással: $\underline{v}$)
a vektor hossza: $|\mathbf{v}| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$



ha ez pontosan 1, akkor egységvektor
ha ez pontosan 0, akkor nullvektor ($\mathbf{0}$)

Vektorok összeadása

paralelogramma szabály

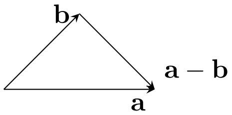


Tulajdonságai:

- kommutatív: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
- asszociatív: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

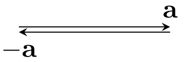
Vektorok különbsége:

$\mathbf{a} - \mathbf{b}$ az a vektor, melyet $\mathbf{b}$-hez adva az $\mathbf{a}$-t kapjuk.



Vektorok ellentettje:

$\mathbf{a}$ ellentettje: $-\mathbf{a}$
$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$



Vektorok számmal való szorzása

$\lambda \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{v}$ egy vektor

$\lambda\mathbf{v}$ az a vektor, melynek hossza $|\lambda| \cdot |\mathbf{v}|$ és

- iránya $\mathbf{v}$-vel megegyező, ha $\lambda > 0$
- iránya $\mathbf{v}$-vel ellentétes, ha $\lambda < 0$
- nullvektor, ha $\lambda = 0$.

Tulajdonságai ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ vektorok):

- $\mu(\lambda\mathbf{a}) = (\mu\lambda)\mathbf{a}$
- $(\mu + \lambda)\mathbf{a} = \mu\mathbf{a} + \lambda\mathbf{a}$
- $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$

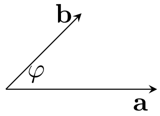
Kiszámolása koordinátákkal:

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad \Rightarrow \quad \lambda\mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$$

Az $\mathbf{a}$ irányú/irányába mutató egységvektor ($\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$):

$$\mathbf{a}_0 = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}$$

Skaláris szorzás

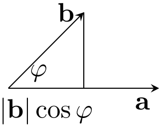


Két vektorhoz rendel egy valós számot:
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos\varphi$, ahol φ az általuk bezárt szög.
További bevett jelölések: $\mathbf{ab}, (\mathbf{a},\mathbf{b}), \langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle$

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} > 0 \iff 0^\circ \le \varphi < 90^\circ$

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} < 0 \iff 90^\circ < \varphi \le 180^\circ$

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0 \iff \varphi = 90^\circ$ vagy $\mathbf{a},\mathbf{b}$ egyike nullvektor



Tulajdonságai:

- $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$ kommutatív
- $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$ disztributív
- $(\lambda\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot(\lambda\mathbf{b})$, ahol $\lambda\in\mathbb{R}$

Kiszámolása koordinátákkal:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)\\ \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)\end{array}\right\}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Speciális eset: $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

Két vektor szöge:

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|} \Rightarrow \varphi = \arccos\left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}\right)$$

Példa

Legyen $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$ és $\mathbf{b} = (3, -2, 0)$.

A hosszuk:

$$|\mathbf{a}| =$$

$$|\mathbf{b}| =$$

A skaláris szorzatuk:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} =$$

A két vektor szöge:

$$\varphi =$$

Példa

Legyen $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$ és $\mathbf{b} = (3, -2, 0)$.

A hosszuk:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$$
$$|\mathbf{b}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{9 + 4 + 0} = \sqrt{13}$$

A skaláris szorzatuk:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 = 3 + (-4) + 0 = -1$$

A két vektor szöge:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}\right) = \arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{13}}\right) = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{182}}\right) \approx 94{,}25^\circ$$

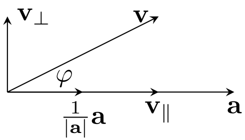
Vektorok felbontása

Egy $\mathbf{v}$ vektort szeretnénk egy adott $\mathbf{a}$ vektorral párhuzamos és arra merőleges komponensre felbontani.

A párhuzamos komponens hossza $|\mathbf{v}|\cos\varphi = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{a}|}$.

Ennyiszer kell venni az $\mathbf{a}$ irányú egységvektort:

$$\mathbf{v}_{\parallel} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{a}|}\left(\frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}\right) = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a}$$



A merőleges komponens a maradék (a két komponens összege a $\mathbf{v}$ vektor), azaz:

$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel} = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a}.$$

Példa:

$\mathbf{v} = (1, -3, 4)$ és $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$

$$\mathbf{v}_{\parallel} =$$

$$\mathbf{v}_{\perp} =$$

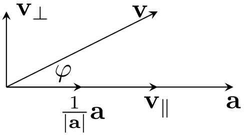
Vektorok felbontása

Egy $\mathbf{v}$ vektort szeretnénk egy adott $\mathbf{a}$ vektorral párhuzamos és arra merőleges komponensre felbontani.

A párhuzamos komponens hossza $|\mathbf{v}|\cos\varphi = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{a}|}$.

Ennyiszer kell venni az $\mathbf{a}$ irányú egységvektort:

$$\mathbf{v}_{\parallel} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{a}|}\left(\frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}\right) = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a}$$



A merőleges komponens a maradék (a két komponens összege a $\mathbf{v}$ vektor), azaz:

$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel} = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a}.$$

Példa:

$\mathbf{v} = (1, -3, 4)$ és $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$

$$\mathbf{v}_{\parallel} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a} = \frac{7}{14}(1,2,3) = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)$$

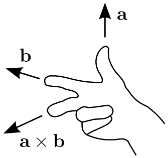
$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel} = (1,-3,4) - \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, -4, \frac{5}{2}\right)$$

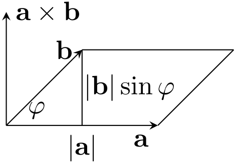
Vektoriális szorzat

Csak 3 dimenzióban működik!
$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ háromdimenziós vektorok, bezárt szögük φ
vektoriális/kereszt szorzatuk az a $\mathbf{c}$ vektor, melyre

- $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin\varphi$
- $\mathbf{c}$ merőleges $\mathbf{a}$-ra és $\mathbf{b}$-re
- $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ jobbrendszert alkot (ebben a sorrendben).

Jelölés: $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$.





Tulajdonságai:

- $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ antikommutatív
- $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ disztributív
- $(\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (\lambda\mathbf{b})$, ahol $\lambda \in \mathbb{R}$
- $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ pontosan akkor, ha $\mathbf{a} = \mathbf{0}, \mathbf{b} = \mathbf{0}$ vagy $\sin\varphi = 0$, azaz $\varphi = 0°$ vagy $\varphi = 180°$: egyik a másiknak valósszám-szorosa.

A vektoriális szorzat hossza $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin\varphi$ pontosan a vektorok által kifeszített paralelogramma területe.

Kiszámolása koordinátákkal:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \\ \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \end{array}\right\} \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

Vektoriális szorzat – példa

Kiszámolása koordinátákkal:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \\ \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)\end{array}\right\} \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{a} = (1, 2, 3) \\ \mathbf{b} = (3, -2, 0)\end{array}\right\} \mathbf{a} \times \mathbf{b} =$$

Vektoriális szorzat – példa

Kiszámolása koordinátákkal:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \\ \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)\end{array}\right\} \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{a} = (1, 2, 3) \\ \mathbf{b} = (3, -2, 0)\end{array}\right\} \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (2 \cdot 0 - 3 \cdot (-2), 3 \cdot 3 - 1 \cdot 0, 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 3) =$$

$$= (6, 9, -8)$$

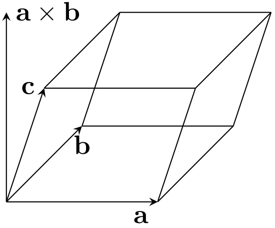
Vegyes szorzat

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ háromdimenziós vektorok
Vegyes szorzatuk egy valós szám:
$\mathbf{abc} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$
Az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon előjeles térfogata.

$\mathbf{abc} > 0 \iff \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ jobbrendszert alkot

$\mathbf{abc} < 0 \iff \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ balrendszert alkot

$\mathbf{abc} = 0 \iff \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ egy síkba esik



Tulajdonságok:
- $\mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab}$
- $\mathbf{abc} = -\mathbf{cba}$

Kiszámolása koordinátákkal:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \\ \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \\ \mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3) \end{array}\right\} \mathbf{abc} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2$$

Feladat

Számítsuk ki az $A(1,0,2), B(3,1,0), C(1,2,4), D(0,3,5)$ csúcspontú tetraéder térfogatát.

Feladat

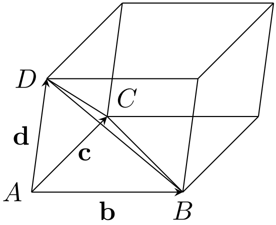
Számítsuk ki az $A(1,0,2), B(3,1,0), C(1,2,4), D(0,3,5)$ csúcspontú tetraéder térfogatát.

Először felírjuk az A-ból induló élvektorokat:

$$\mathbf{b} = \overrightarrow{AB} = (2,1,-2)$$

$$\mathbf{c} = \overrightarrow{AC} = (0,2,2)$$

$$\mathbf{d} = \overrightarrow{AD} = (-1,3,3)$$



Az $ABCD$ tetraéder térfogata éppen a $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatának hatoda.
A paralelepipedon térfogatát a vektorok vegyes szorzata adja meg:

$$\begin{aligned}\mathbf{bcd} &= 2\cdot 2\cdot 3 + 1\cdot 2\cdot(-1) + (-2)\cdot 0\cdot 3 - (-2)\cdot 2\cdot(-1) - 1\cdot 0\cdot 3 - 2\cdot 2\cdot 3 = \\ &= 12 + (-2) + 0 - 4 - 0 - 12 = -6\end{aligned}$$

Tehát a paralelepipedon térfogata 6, és így a tetraéderé 1.