

8. előadás

Komplex számok

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet, Geometria Tanszék

2022. március 8.

Bevezetés

Az $x^2 + 1 = 0$, azaz az $x^2 = -1$ egyenletnek nincs valós megoldása.

Legyen $i = \sqrt{-1}$ egy szimbólum, amivel számolunk ($i^2 = -1$).

Ekkor minden szám $a + bi$ alakú ($a, b \in \mathbb{R}$), és úgy számolunk, mintha egy változó lenne, de kihasználjuk, hogy $i^2 = -1$.

Összeadás:

$$(2 + 3i) + (4 + 5i) = 6 + 8i$$

Kivonás:

$$(2 + 3i) - (4 + 5i) = -2 + (-2)i = -2 - 2i$$

Szorzás:

$$(2 + 3i)(4 + 5i) = 8 + 10i + 12i + 15i^2 = 8 + 22i - 15 = -7 + 22i$$

A **komplex számok** $z = a + bi$ alakúak ($a, b \in \mathbb{R}$), ahol

a a **valós rész**, jelölés: $a = \operatorname{Re} z = \Re z$

b a **képzetes rész**, jelölés: $b = \operatorname{Im} z = \Im z$

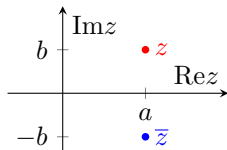
Komplex számok halmazának jelölése: \mathbb{C} .

Osztás

A $z = a + bi$ komplex szám

konjugáltja: $\bar{z} = a - bi$;

abszolút értéke:



$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(a + bi)(a - bi)} = \sqrt{a^2 - abi + abi - b^2i^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Osztás:

bővítünk a nevező konjugáltjával:

$$\begin{aligned} \frac{2 + 3i}{4 + 5i} &= \frac{2 + 3i}{4 + 5i} \cdot \frac{4 - 5i}{4 - 5i} = \frac{(2 + 3i)(4 - 5i)}{(4 + 5i)(4 - 5i)} = \frac{8 - 10i + 12i - 15i^2}{16 - 20i + 20i - 25i^2} = \\ &= \frac{23 + 2i}{41} = \frac{23}{41} + \frac{2}{41}i \end{aligned}$$

Feladat

$$\frac{8 - i}{3 - 2i} = ?$$

$$\frac{8-i}{3-2i} = ?$$

$$\begin{aligned}\frac{8-i}{3-2i} &= \frac{8-i}{3-2i} \cdot \frac{3+2i}{3+2i} = \frac{(8-i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{24+16i-3i-2i^2}{3^2+2^2} = \\ &= \frac{24+16i-3i+2}{9+4} = \frac{26+13i}{13} = 2+i\end{aligned}$$

Polinomok gyöke

$i^2 = -1$, így $(2i)^2 = -4$ és $(-2i)^2 = -4$.

Egy negatív q szám négyzetgyöke: $\pm\sqrt{-q}i$.

Másodfokú egyenlet a komplex számok körében:

$$x^2 - 3x + 3 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 12}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}i}{2} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Algebra alaptétele:

Egy polinomnak mindig van gyöke a komplex számok körében.

Következmény:

Egy n -edfokú polinomot n darab gyöktényező szorzatára bonthatunk a komplex számok körében:

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = a_n (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$$

A z_1, z_2, \dots, z_n az n darab gyöke a polinomnak (nem feltétlenül különbözőek).

Trigonometrikus alak

Egy komplex szám $a + bi$ alakban való felírását **algebrai alaknak** nevezzük.

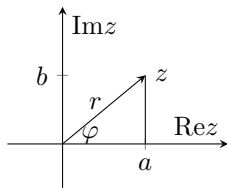
A komplex szám **trigonometrikus alakja** $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, ahol

$r = |z|$ az abszolút érték és

φ az argumentum, azaz a komplex szám helyvektora és a valós tengely által bezárt szög a komplex síkon (jelölés: $\arg z$).

$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$, amiből

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{b}{a} & \text{ha } a > 0 \\ \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + \pi & \text{ha } a < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{ha } a = 0 \text{ és } b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{ha } a = 0 \text{ és } b < 0 \end{cases}$$



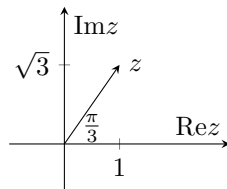
Példa áttérésre:

$$z = 1 + \sqrt{3}i \text{ tehát } a = 1 \text{ és } b = \sqrt{3}$$

$$r = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3} \quad (a = 1 > 0)$$

$$\text{Így } 1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right).$$



Műveletek a trigonometrikus alakkal

Összeadás, kivonás általában nehéz a trigonometrikus alakkal.

Szorzás:

$$r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Osztás:

$$\frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Hatványozás (Moivre-képlet):

$$(r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$$

Gyökvonás:

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n} \right) \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Példa

$\sqrt[3]{-1}$ komplex számok körében

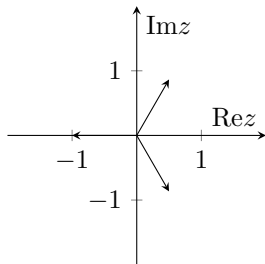
Először át kell írni trigonometrikus alakba:

$$r = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$$

$$\varphi = \arctg(0) + \pi = \pi \quad (-1 < 0)$$

Tehát

$$-1 = 1(\cos \pi + i \sin \pi)$$



Gyökvonás:

$$\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{1} \left(\cos \frac{\pi + k \cdot 2\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + k \cdot 2\pi}{3} \right) \quad k = 0, 1, 2$$

$$k = 0 \quad 1 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$k = 1 \quad 1 \left(\cos \frac{3\pi}{3} + i \sin \frac{3\pi}{3} \right) = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

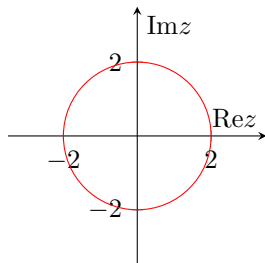
$$k = 2 \quad 1 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Komplex számok ábrázolása

$$|z| = 2$$

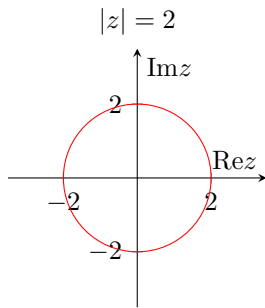
Komplex számok ábrázolása

$$|z| = 2$$

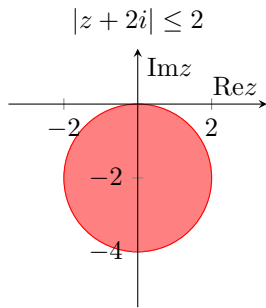


$$|z + 2i| \leq 2$$

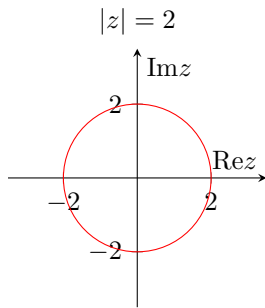
Komplex számok ábrázolása



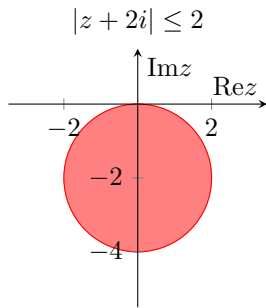
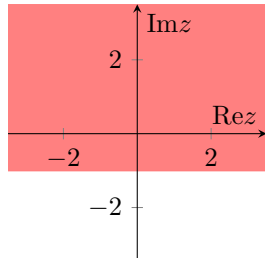
$$\text{Im} z > -1$$



Komplex számok ábrázolása



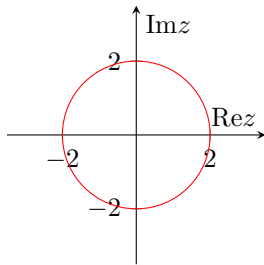
$\text{Im} z > -1$



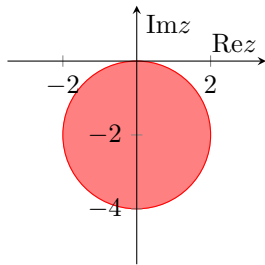
$\text{Re} z + \text{Im} z = 0$

Komplex számok ábrázolása

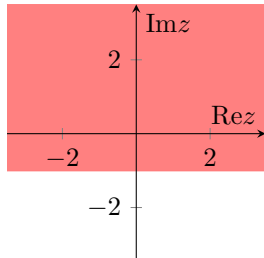
$$|z| = 2$$



$$|z + 2i| \leq 2$$



$$\text{Im} z > -1$$



$$\text{Re} z + \text{Im} z = 0$$

