Matematika A2a - Vektorfüggvények elméleti kérdései

(BME GTK műszaki menedzser szak, 2022. tavasz)

Első típusú improprius integrál: Végtelen tartományon korlátos függvény

Legyen f integrálható minden $\beta > a$ esetén az $[a, \beta]$-n. Ha a $\lim\limits_{\beta\to\infty} \int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$ határérték létezik és véges, akkor az f függvény impropius integrálja létezik, és $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\beta\to\infty} \int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$.

Második típusú improprius integrál: Véges tartományon nem korlátos függvény I.

Legyen f integrálható $[\alpha, b]$-n minden $\alpha \in (a, b)$ esetén, és f nem korlátos az $[a, b]$-n Ha létezik és véges a $\lim\limits_{\alpha\to a+} \int_\alpha^b f(x)\,\mathrm{d}x$ határérték, akkor $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\alpha\to a+} \int_\alpha^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Második típusú improprius integrál: Véges tartományon nem korlátos függvény II.

Legyen f integrálható $[a, \beta]$-n minden $\beta \in (a, b)$ esetén, és f nem korlátos az $[a, b]$-n Ha létezik és véges a $\lim\limits_{\beta\to b-} \int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$ határérték, akkor $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\beta\to b-} \int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$.

Az $\dfrac{1}{x^p}$ improprius integráljának konvergenciája

Az $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ integrál pontosan akkor konvergens, ha $1 < p$.
Az $\int_0^1 \dfrac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ integrál pontosan akkor konvergens, ha $1 > p$.

Vektorok számmal való szorzása

A λ valós szám és a $\mathbf{v}$ vektor szorzata az a vektor, melynek hossza $|\lambda| \cdot |\mathbf{v}|$, és iránya $\mathbf{v}$-vel megegyező, ha $\lambda > 0$, illetve iránya $\mathbf{v}$-vel ellentétes, ha $\lambda < 0$.
Ha a $\mathbf{v}$ koordinátái (v_1, v_2, v_3), akkor λ-val való szorzatának a koordinátái $(\lambda v_1, \lambda v_2, \lambda v_3)$.
A $\lambda\mathbf{v}$ szorzat pontosan akkor $\mathbf{0}$, ha a $\lambda = 0$ vagy $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
Jelölés: $\lambda\mathbf{v}$.

Skaláris szorzat

Az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektorok skaláris szorzata az $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi$ szám, ahol φ jelöli az általuk bezárt szöget. Ha az $\mathbf{a}$ koordinátái (a_1, a_2, a_3), míg a $\mathbf{b}$ koordinátái (b_1, b_2, b_3), akkor a skaláris szorzatuk $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.
A skaláris szorzat pontosan akkor 0, ha a két vektor merőleges egymásra.
Jelölés: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, $\mathbf{ab}$ vagy $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$.

Vektoriális szorzat

Az $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ háromdimenziós vektorok vektoriális szorzata az a $\mathbf{c}$ vektor, melyre a következők teljesülnek:

1. $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\varphi$, ahol φ jelöli az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ által bezárt szöget;
2. $\mathbf{c}$ merőleges az $\mathbf{a}$-ra és a $\mathbf{b}$-re;
3. az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorok jobbrendszert alkotnak.

Ha az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, akkor $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$.
A vektoriális szorzat pontosan akkor $\mathbf{0}$, ha a két vektor párhuzamos.
Jelölés: $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Vegyes szorzat

Az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ háromdimenziós vektorok vegyes szorzata az $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ (vektoriális, majd skaláris) szorzat.
Geometriai jelentése: az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon előjeles térfogata.
A vegyes szorzat pontosan akkor 0, ha a három vektor egy síkba esik.
Jelölés: $\mathbf{abc}$.

Sík Hesse-féle normálegyenlete

Az $\mathbf{n} = (a, b, c)$ normálvektorú sík Hesse-féle normálegyenlete:

$$\frac{ax + by + cz - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0.$$

Pont és sík távolsága
A $P(x_0, y_0, z_0)$ pont távolsága az $ax + by + cz = d$ egyenletű síktól:

$$\left|\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right|.$$

Egyenes paraméteres megadása
A $\mathbf{v} = (a, b, c)$ irányvektorú $P(x_0, y_0, z_0)$ ponton átmenő egyenes paraméteres egyenlete

$$\{P + t\mathbf{v} = (x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Egyenes egyenletrendszere a térben
Az (a, b, c) irányvektorú $P(x_0, y_0, z_0)$ ponton átmenő egyenes egyenletrendszere

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Lineáris kombináció
A $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ n dimenziós vektorok lineárisan kombinációja $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_k\mathbf{v}_k$, ahol $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ valós számok.

Lineáris összefüggőség
A $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ n dimenziós vektorok lineárisan összefüggenek, ha vannak olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ számok úgy, hogy $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ és a $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ számok nem mindegyike 0.

Lineáris függetlenség
A $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ n dimenziós vektorok lineárisan függetlenek, ha a $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ egyenlőségből következik, hogy $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$.

Generátorrendszer
A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ n dimenziós vektorok az $\mathbb{R}^n$ tér generátorrendszere, ha minden $\mathbf{v}$ n dimenziós vektor előáll ezek lineáris kombinációjaként.

Bázis
Az n dimenziós térben n darab lineárisan független vektort bázisnak nevezünk.

Vektorrendszerek elemszáma
Egy n dimenziós térben ha

- k darab lineárisan független vektor van, akkor $k \leq n$.
- k darab vektor generátorendszert alkot, akkor $k \geq n$.
- k darab vektor bázist alkot, akkor $k = n$.

Altér
Az $\mathbb{R}^n$ tér egy V részhalmaza altér, ha teljesül a következő két feltétel: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ esetén $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in V$ és $\mathbf{v} \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\lambda\mathbf{v} \in V$.

Generált altér
A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektorok által generált altér azon vektorokból áll, melyek előállnak $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ lineáris kombinációjaként.
Jelölése: $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$.

Homogén egyenletrendszer
Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer homogén, ha $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.
Ilyenkor $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mindig megoldás. Továbbá, ha $\mathbf{x}$ megoldás, akkor $\lambda\mathbf{x}$ is.

Mátix rangja
Egy mátrix rangja a benne található lineárisan független oszlopvektorok maximális száma. Ez ugyanannyi, mint a benne található lineárisan független sorvektorok maximális száma. A legnagyobb méretű nemnulla aldeterminəns mérete szintén a mátrix rangjával egyezik meg.

Lineáris egyenletrendszerek megoldásának mátrixrangos vizsgálata
Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg (ahol $\mathbf{A}$ $m \times n$-es mátrix, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$), ha az egyenletrendszer mátrixának és a kibővített mátrixnak a rangja megegyezik ($\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b})$).
A lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg egyértelműen, ha az egyenletrendszer mátrixának és a kibővített mátrixnak a rangja egymással és az ismeretlenek számával is megegyezik ($\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = n$).
Ha $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) < n$, akkor $n - \mathrm{r}(\mathbf{A})$ változó tetszőlegesen megválasztható (szabad paraméter).

Kifejtési tétel
Az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix determinánsát kiszámíthatjuk a következő formulák segítségével (sor, illetve oszlop szerinti kifejtés):

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{i,j},$$
$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{i,j},$$

ahol $A_{i,j}$ jelöli az $\mathbf{A}$ mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának elhagyásával kapott $(n-1) \times (n-1)$-es mátrix determinánsát.

Sor- és oszlopműveletek használhatósága

- egyenletrendszer megoldása (csak sorműveletek!)
- inverz számolása (első módszer) (csak sorműveletek!)
- mátrixok rangjának meghatározása
- determináns kiszámítása
  - csere: (-1)-es szorzó
  - sor/oszlop szorzásánál ki kell emelni a szorzót

Inverz mátrix
A négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix inverze az a $\mathbf{A}^{-1}$-gyel jelölt mátrix, melyre $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_n$ és $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}_n$.

Inverz mátrix létezésének feltétele
A négyzetes $\mathbf{A}$ mátrixnak pontosan akkor létezik inverze, ha a determinánsa nem 0.

Inverz mátrix kiszámítása
Ha az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix invertálható, akkor az inverzének i-edik sorának j-edik eleme:

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)_{i,j} = (-1)^{i+j} A_{j,i} / \det(\mathbf{A}),$$

ahol $A_{j,i}$ jelöli az $\mathbf{A}$ mátrix j-edik sorának és i-edik oszlopának elhagyásával kapott $(n-1) \times (n-1)$-es mátrix determinánsát.
Az inverz kiszámolására másik módszer a Gauss-elimináció.

Mátrix sajátértéke, sajátvektora
Egy $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix sajátértéke $\lambda \in \mathbb{R}$, ha van olyan $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ nemnulla vektor, hogy $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$. Ekkor a $\mathbf{v}$-t a λ-hoz tartozó sajátvektornak nevezzük.

Diagonális mátrix
Egy négyzetes mátrixot diagonálisnak nevezünk, ha a főátlón kívül az összes eleme 0.

Diagonalizálható mátrix
Egy $\mathbf{A}$ mátrixot diagonalizálhatónak nevezünk, ha létezik olyan invertálható $\mathbf{C}$ mátrix, hogy a $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$ mátrix diagonális.

Diagonalizálhatóság feltétele
Egy $n \times n$-es mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha van n darab lineárisan független sajátvektora.

Áttérés algebrai alakról trigonometrikus alakra
A $z = a + bi$ komplex szám trigonometrikus alakja $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, ahol $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ és

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right), & \text{ha } a > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right), & \text{ha } a < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{ha } a = 0 \text{ és } b > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{ha } a = 0 \text{ és } b < 0. \end{cases}$$

Komplex számok n-edik hatványa
A $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ komplex szám n-edik hatványa: $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$.

Komplex számok n-edik gyökeinek meghatározása
A $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ komplex szám n-edik gyökei a

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right)$$

komplex számok $k = 0, 1, \ldots, n-1$-re.

Algebra alaptétele
Egy polinomnak a komplex számok körében mindig van gyöke.

Parciális derivált
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subseteq \mathbb{R}^m$ függvény az $a = (a_1, \ldots, a_m) \in D_f$ pontban x_i szerint parciálisan deriválható, ha az egyváltozós $f_i\colon x_i \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_m)$ függvény az a_i helyen differenciálható. A

$$\lim_{x_i \to a_i} \frac{f_i(x_i) - f_i(a_i)}{x_i - a_i}$$

differenciálhányadost az f függvény x_i szerinti parciális deriváltjának nevezzük.
Jelölése: $f'_{x_i}(a)$ vagy $\dfrac{\partial f(a)}{\partial x_i}$.

Iránymenti derivált
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ függvény $P_0 \in D_f$ pontbeli $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ iránymenti deriváltján ($|\mathbf{e}| = 1$) a

$$\lim_{P \to P_0} \frac{f(P) - f(P_0)}{\left|\overrightarrow{P_0P}\right|},$$

határértéket értjük, ahol P úgy tart a P_0-hoz, hogy a $\overrightarrow{P_0P}$ vektor az $\mathbf{e}$-vel párhuzamos és egyenlő állású. A határértéket így is felírhatjuk:

$$\lim_{t \to 0+} \frac{f(P_0 + t\mathbf{e}) - f(P_0)}{t}$$

Jelölés: $f'_{\mathbf{e}}(P_0)$.

Gradiens
Ha az n változós $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ függvénynek valamely $P_0 \in \mathbb{R}^n$ pontban mindegyik parciális deriváltja létezik, akkor az f függvény P_0-beli gradiensén a P_0-beli parciális deriváltakból álló n dimenziós vektort értjük: $\operatorname{grad} f(P_0) = (f'_{x_1}(P_0), f'_{x_2}(P_0), \ldots, f'_{x_n}(P_0))$.

Jacobi-mátrix
Ha $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény minden komponensének mindegyik parciális deriváltja létezik valamely $P \in \mathbb{R}^n$ pontban, akkor az f függvény P-beli Jacobi-mátrixán a komponens függvények parciális deriváltjaiból álló mátrixot értjük: az i-edik sorának a j-edik eleme az i-edik komponens függvény j-edik változója szerinti parciális deriváltja.

Többváltozós függvény lokális minimuma
Az $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ többváltozós függvénynek az $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ pontban lokális minimuma van, ha az $\mathbf{x}_0$ pontnak van olyan D környezete, hogy $f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x})$ minden $\mathbf{x} \in D$ esetén.

Többváltozós függvény lokális maximuma
Az $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ többváltozós függvénynek az $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ pontban lokális maximuma van, ha az $\mathbf{x}_0$ pontnak van olyan D környezete, hogy $f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x})$ minden $\mathbf{x} \in D$ esetén.

Kétváltozós függvény lokális szélsőértékeire vonatkozó szükséges feltétel
Ha a kétváltozós valós függvénynek valamely pontban lokális szélsőértéke van, akkor abban a pontban létező parciális deriváltjai 0-k.

Kétváltozós függvény lokális szélsőértékeire vonatkozó elégséges feltétel
Ha az (x_0, y_0) pont valamely környezetében az $f(x, y)$ függvény második parciális deriváltjai léteznek és folytonosak, továbbá

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0 \quad \text{és} \quad f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0,$$

akkor az $f(x, y)$ függvénynek lokális szélsőértéke van az (x_0, y_0) pontban. Ez a lokális szélsőérték minimum, ha $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, és maximum, ha $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$.

Kétváltozós függvény nyeregpontra vonatkozó elégséges feltétel
Ha az (x_0, y_0) pont valamely környezetében az $f(x, y)$ függvény második parciális deriváltjai léteznek és folytonosak, továbbá

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0 \quad \text{és} \quad f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2 < 0,$$

akkor az $f(x, y)$ függvénynek nincs lokális szélsőértéke az (x_0, y_0) pontban (nyeregpont).

Valós számsorozat tulajdonságai
- alulról korlátos, ha létezik $k \in \mathbb{R}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \geq k$
- felülről korlátos, ha létezik $K \in \mathbb{R}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq K$
- korlátos, ha létezik $K \in \mathbb{R}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|a_n| \leq K$
- monoton nő, ha $n < m$ esetén $a_n \leq a_m$
- szigorúan monoton nő, ha $n < m$ esetén $a_n < a_m$
- monoton csökken, ha $n < m$ esetén $a_n \geq a_m$
- szigorúan monoton csökken, ha $n < m$ esetén $a_n > a_m$

Valós számsorozat véges határértéke
Az (a_n) sorozat határértéke az $A \in \mathbb{R}$ szám, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $n > N$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$. Jelölés: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. Ekkor a sorozat konvergens, minden más esetben divergens. Ha $A = 0$, akkor az (a_n) sorozatot nullsorozatnak nevezzük.

Valós számsorozat végtelen határértéke
Ha az (a_n) sorozathoz minden $K \in \mathbb{R}$ számhoz létezik $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $n > N$ esetén $K < a_n$, akkor az (a_n) sorozat a végtelenbe tart, ezt így jelöljük: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Valós számsorozat mínusz végtelen határértéke
Ha az (a_n) sorozathoz minden $K \in \mathbb{R}$ számhoz létezik $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $n > N$ esetén $a_n < K$, akkor az (a_n) sorozat a mínusz végtelenbe tart, ezt így jelöljük: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Numerikus sor
Tetszőleges (a_n) sorozatból képezett $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots$ formális összeget (numerikus) sornak nevezünk, melyet általában $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ alakban írunk.

Numerikus sor konvergenciája
Egy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sort konvergensnek mondunk, ha az $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ részletösszegsorozat konvergens.

Leibniz-sor
Olyan $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor, melyben az a_n tagok váltakozó előjelűek, abszolút értékben monoton csökkennek és 0-hoz tartanak. Minden Leibniz-sor konvergens.

Hibabecslés Leibniz-soroknál
Ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ Leibniz-sor összege A, akkor tetszőleges $N \in \mathbb{N}$-re $\left| A - \sum\limits_{n=1}^{N} a_n \right| \leq |a_{N+1}|$.

Harmonikus és hiperharmonikus sorok konvergenciája
A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ sor pontosan akkor konvergens, ha $1 < a$.

Cauchy-féle integrálkritérium
Ha az $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ függvény monoton csökken és pozitív, akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ sor konvergens} \iff \int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ improprius integrál konvergens}$$

Majoráns kritérium
Ha az (a_n) és (b_n) számsorozatokhoz található olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $0 \leq a_n \leq b_n$ és a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ sor konvergens, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor is konvergens.

Minoráns kritérium
Ha az (a_n) és (b_n) számsorozatokhoz található olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $0 \leq a_n \leq b_n$ és a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor divergens, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ sor is divergens.

Gyökkritérium
A pozitív tagú $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens, ha $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, és divergens, ha $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$.

Hányados kritérium
A pozitív tagú $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens, ha $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, és divergens, ha $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.

Abszolút konvergencia
A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor abszolút konvergens, ha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sor konvergens.

Feltételes konvergencia
A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor feltételesen konvergens, ha konvergens, de nem abszolút konvergens.

Hatványsor
A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ alakú sort x_0 középpontú hatványsornak mondjuk.

Konvergenciatartomány
Egy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ hatványsor konvergenciatartományának azt a halmazt nevezzük, melynek x elemeire a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ sor konvergens.

Cauchy–Hadamard-tétel
A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n$ hatványsor konvergenciasugara: $r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$. Ha $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, akkor $r = \infty$, míg ha $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, akkor $r = 0$.
A hatványsor az $(a-r, a+r)$ intervallumban konvergens, az $[a-r, a+r]$ intervallumon kívül divergens.

A hatványsorok tagonkénti deriválására vonatkozó tétel

Az $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor konvergencia intervallumának belsejében a tagonkénti deriválással kapott $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ hatványsor is konvergens, és egyenlő $f'(x)$-szel.

A hatványsorok tagonkénti integrálására vonatkozó tétel

Az $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor konvergencia intervallumának belső részintervallumaiban tagonként integrálható, azaz $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\left[x^{n+1}\right]_a^b$, ha a és b a konvergenciaintervallum belsejébe esik.

Taylor-sor

Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény $x_0 \in \mathbb{R}$ körüli Taylor-sora a következő hatványsor:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots .$$

Taylor-polinom

Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény $x_0 \in \mathbb{R}$ körüli N-edfokú Taylor-polinomja a következő polinom:

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(N)}(x_0)}{N!}(x-x_0)^N .$$