10. gyakorlat

Kettős integrálok

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet, Geometria Tanszék

2022. április 27.

1. feladat (a)

Számítsuk ki az $f(x,y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2$ kétváltozós függvény integrálját az $1 \leq x \leq 2$; $0 \leq y \leq 3$ tartományon.

1. feladat (a)

Számítsuk ki az $f(x,y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2$ kétváltozós függvény integrálját az $1 \leq x \leq 2$; $0 \leq y \leq 3$ tartományon.

$$\int\limits_1^2 \int\limits_0^3 2x^2 + 3xy + 4y^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \left[2x^2 y + 3x\frac{y^2}{2} + 4\frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^3 \, \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_1^2 6x^2 + \frac{27}{2}x + 36 \, \mathrm{d}x = \left[6\frac{x^3}{3} + \frac{27}{2}\frac{x^2}{2} + 36x \right]_1^2 = \frac{281}{4} = 70{,}25$$

1. feladat (b)

Számítsuk ki az $f(x, y) = xe^y$ kétváltozós függvény integrálját $y = x^2$ és $y = x + 2$ között.

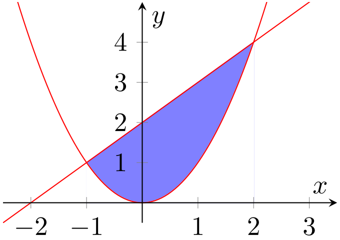
1. feladat (b)

Számítsuk ki az $f(x,y) = xe^y$ kétváltozós függvény integrálját $y = x^2$ és $y = x + 2$ között.

Az $y = x^2$ és az $y = x + 2$ meszéspontjainak x koordinátáira

$$x^2 = x + 2,$$

amiből $x_1 = -1$ és $x_2 = 2$.
Az x változó e két határ között mozog, míg adott x esetén az y változó az x^2 és $x + 2$ között változik (ezen x-ekre $x^2 \le x + 2$):



$$\int_{-1}^{2} \int_{x^2}^{x+2} xe^y \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} \left[xe^y\right]_{y=x^2}^{x+2} \, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} xe^{x+2} - xe^{x^2} \, \mathrm{d}x =$$

$$= \left[xe^{x+2} - e^{x+2} - \frac{e^{x^2}}{2}\right]_{-1}^{2} = \frac{e^4}{2} + \frac{5}{2}e \approx 34{,}09$$

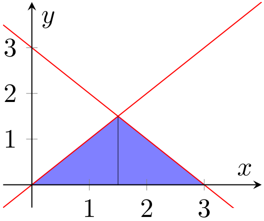
1. feladat (c)

Számítsuk ki az $f(x, y) = xy$ kétváltozós függvény integrálját $y = x$, $y = 3 - x$ és az x-tengely közötti háromszögön.

1. feladat (c)

Számítsuk ki az $f(x,y) = xy$ kétváltozós függvény integrálját $y = x$, $y = 3 - x$ és az x-tengely közötti háromszögön.

Az x változó 0 és 3 között vesz fel értékeket, és adott x-re az y változó 0 és x, illetve 0 és $3 - x$ között változik attól függően, hogy x másfélnél kisebb vagy nagyobb. Ennek megfelelően kettőbontjuk az integrált, és külön vesszük az $x \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$ és az $x \in \left[\frac{3}{2}, 3\right]$ esetet:



$$\int_0^{\frac{3}{2}} \int_0^{x} xy \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x + \int_{\frac{3}{2}}^{3} \int_0^{3-x} xy \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{3}{2}} \left[x \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{x} \mathrm{d}x + \int_{\frac{3}{2}}^{3} \left[x \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{3-x} \mathrm{d}x =$$

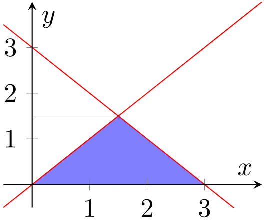
$$= \int_0^{\frac{3}{2}} x \frac{x^2}{2} \,\mathrm{d}x + \int_{\frac{3}{2}}^{3} x \frac{(3-x)^2}{2} \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{x^3}{2} \,\mathrm{d}x + \int_{\frac{3}{2}}^{3} \frac{9}{2}x - 3x^2 + \frac{x^3}{2} \,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{x^4}{8}\right]_0^{\frac{3}{2}} + \left[\frac{9}{2}\frac{x^2}{2} - x^3 + \frac{x^4}{8}\right]_{\frac{3}{2}}^{3} = \frac{27}{16} = 1{,}6875$$

1. feladat (c) – másik lehetőség

Számítsuk ki az $f(x, y) = xy$ kétváltozós függvény integrálját $y = x$, $y = 3 - x$ és az x-tengely közötti háromszögön.

A másik lehetőség, hogy először az x szerint integrálunk, azaz y befutja a $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ intervallumot, és egy adott y-ra az x változó y-tól $(3 - y)$-ig fut:



$$\int_0^{\frac{3}{2}} \int_y^{3-y} xy \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{3}{2}} \left[\frac{x^2}{2} y\right]_{x=y}^{3-y} \mathrm{d}y = \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{(3-y)^2}{2} y - \frac{y^2}{2} y \,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{9}{2} y - 3y^2 \,\mathrm{d}y = \left[\frac{9}{2}\frac{y^2}{2} - y^3\right]_0^{\frac{3}{2}} = \frac{27}{16} = 1{,}6875$$

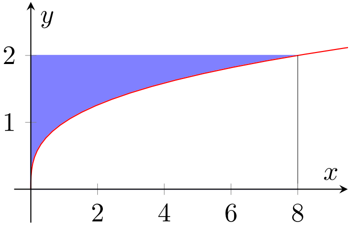
2. feladat (a)

Cseréljük fel az integrálás sorrendjét, és számoljuk ki az $\displaystyle\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4+1}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ integrált.

2. feladat (a)

Cseréljük fel az integrálás sorrendjét, és számoljuk ki az $\displaystyle\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4+1}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ integrált.

Az integrálás sorendjének megcserélésekor meg kell gondolni, hogy hogyan változnak az integrálási határok.



$$y = \sqrt[3]{x} \quad \Longleftrightarrow \quad x = y^3$$

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4+1}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \int_0^{y^3} \frac{1}{y^4+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \left[\frac{1}{y^4+1}x\right]_{x=0}^{y^3} \mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^2 \frac{y^3}{y^4+1}\,\mathrm{d}y = \left[\frac{\ln(y^4+1)}{4}\right]_0^2 = \frac{\ln(17)}{4} \approx 0{,}708$$

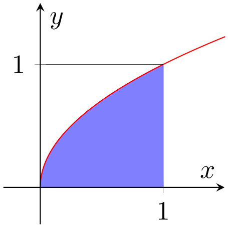
2. feladat (b)

Cseréljük fel az integrálás sorrendjét, és számoljuk ki az $\displaystyle\int_0^1 \int_{y^2}^1 y \sin(x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ integrált.

2. feladat (b)

Cseréljük fel az integrálás sorrendjét, és számoljuk ki az $\int\limits_0^1 \int\limits_{y^2}^1 y \sin(x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ integrált.

Hasonlóan az (a) feladathoz:



$$x = y^2 \quad \Longleftrightarrow \quad y = \sqrt{x}$$

$$\int\limits_0^1 \int\limits_{y^2}^1 y \sin(x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{\sqrt{x}} y \sin(x^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\sin(x^2)\right]_{y=0}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{x}{2}\sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\cos(x^2)}{4}\right]_0^1 = \frac{1-\cos(1)}{4} \approx 0{,}115$$

3. feladat (a)

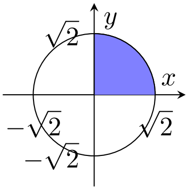
Polárkoordináták segítségével számoljuk ki az $\displaystyle\iint_A x^3 y \,\mathrm{d}(x,y)$ integrált a $A = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 2,\ 0 \leq x,\ 0 \leq y\}$ tartományon.

3. feladat (a)

Polárkoordináták segítségével számoljuk ki az $\iint\limits_A x^3 y \, \mathrm{d}(x,y)$ integrált a $A = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 2,\ 0 \le x,\ 0 \le y\}$ tartományon.

Ebben az esetben

$$0 \le r \le \sqrt{2}$$
$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},$$



így az integrál:

$$\iint\limits_A x^3 y \, \mathrm{d}(x,y) = \int\limits_0^{\sqrt{2}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (r\cos\varphi)^3 (r\sin\varphi) r \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r = \int\limits_0^{\sqrt{2}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} r^5 \cos^3\varphi \sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r =$$

$$= \int\limits_0^{\sqrt{2}} \left[-r^5 \frac{\cos^4\varphi}{4} \right]_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}r = \int\limits_0^{\sqrt{2}} \frac{r^5}{4} \, \mathrm{d}r = \left[\frac{r^6}{24} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

3. feladat (b)

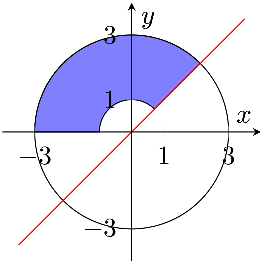
Polárkoordináták segítségével számoljuk ki az $\iint\limits_A x^2 + y^2 \, \mathrm{d}(x, y)$ integrált a $A = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9,\ 0 \leq y,\ x \leq y\}$ tartományon.

3. feladat (b)

Polárkoordináták segítségével számoljuk ki az $\iint\limits_A x^2 + y^2 \,\mathrm{d}(x,y)$ integrált a $A = \{(x,y) \mid 1 \le x^2+y^2 \le 9,\ 0 \le y,\ x \le y\}$ tartományon.

Ebben az esetben

$$\begin{aligned} 1 \le r \le 3 \\ \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \pi, \end{aligned}$$



így az integrál:

$$\iint\limits_A x^2 + y^2 \,\mathrm{d}(x,y) = \int\limits_1^3 \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \left((r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2\right) r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r = \int\limits_1^3 \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} r^3 \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r =$$

$$= \int\limits_1^3 \left[r^3\varphi\right]_{\varphi=\frac{\pi}{4}}^{\pi} \,\mathrm{d}r = \int\limits_1^3 \frac{3\pi}{4} r^3 \,\mathrm{d}r = \left[\frac{3\pi}{4}\frac{r^4}{4}\right]_1^3 = 15\pi \approx 47{,}12$$

Házi feladatok

1. $$\iint_A \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}(x,y) = ?, \quad \text{ahol } A = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \frac{1}{x} \le y \le x,\ 0 \le x \le 2 \right\}$$

2. $$\int_0^1 \int_{2y}^2 4\cos\left(x^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = ?$$

3. $$\iint_A y^2\,\mathrm{d}(x,y) = ?, \quad \text{ahol } A = \left\{ (x,y) \;\middle|\; x^2 + y^2 \le 3,\ 0 \le y \le \sqrt{3}x \right\}$$

Házi feladatok végeredményei

1. $\dfrac{9}{4} = 2{,}25$
2. $\sin(4) \approx -0{,}7568$
3. $\dfrac{9}{4}\left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{8}\right) \approx 0{,}691$