13. gyakorlat

Hatványsorok, Taylor-sorok

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet, Geometria Tanszék

2022. május 18.

1. feladat (a)

Állapítsuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ hatványsor konvergenciatartományát.

1. feladat (a)

Állapítsuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ hatványsor konvergenciatartományát.

Egy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ hatványsor konvergenciasugarát az $r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ képlettel számolhatjuk. Ekkor a hatványsor az $(x_0 - r, x_0 + r)$ intervallumban konvergens, míg a határpontokat külön meg kell nézni, hogy ott konvergens-e.

$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ és $x_0 = 0$. A konvergenciasugárhoz

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt[2n]{n}} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt[n]{n}}} \to 1,$$

így a konvergenciasugár 1. Az intervallumon határain (± 1-ben) is meg kell nézni:

$x = 1$ esetén a hatványsor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$, ami divergens ($\frac{1}{2} \not> 1$).

$x = -1$ esetén a hatványsor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, ami Leibniz-sor, így konvergens.

Tehát a konvergenciatartomány a $[-1, 1)$ intervallum.

1. feladat (b)

Állapítsuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^{n-1}}$ hatványsor konvergenciatartományát.

1. feladat (b)

Állapítsuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^{n-1}}$ hatványsor konvergenciatartományát.

$a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ és $x_0 = 2$. A konvergenciasugárhoz:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{2^{n-1}}} = \sqrt[n]{\frac{2}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{2}}{2} \to \frac{1}{2}$$

A konvergenciasugár ennek a reciproka, azaz 2. Így a hatványsor a $(0,4)$ intervallumban biztosan konvergens. A két határpont:

$x = 4$ esetén a hatványsor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4-2)^n}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2$, ami divergens.

$x = 0$ esetén a hatványsor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(0-2)^n}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot 2$, ami szintén divergens.

Tehát a konvergenciatartomány a $(0,4)$ intervallum.

1. feladat (c)

Állapítsuk meg a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n!}$ hatványsor konvergenciatartományát.

1. feladat (c)

Állapítsuk meg a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n!}$ hatványsor konvergenciatartományát.

$a_n = \frac{1}{n!}$ és $x_0 = 5$. Ebben az esetben a konvergenciasugarat az $r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$ képlettel számoljuk (a faktoriális miatt a gyökös nem szerencsés). Ehhez:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n!}{(n+1)n!} = \frac{1}{n+1} \to 0$$

A konvergenciasugár ennek a reciproka, ami 0 esetén azt jelenti, hogy a sugár végtelen, így a hatványsor az egész számegyenesen konvergens.

2. feladat (a)

Írjuk fel a $\cos(5x)$ függvény $x_0 = 0$ pont körüli Taylor-sorát. Határozzuk meg a sor konvergenciasugarát is.

2. feladat (a)

Írjuk fel a $\cos(5x)$ függvény $x_0 = 0$ pont körüli Taylor-sorát. Határozzuk meg a sor konvergenciasugarát is.

Mivel $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, így

$$\cos(5x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(5x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{5^{2n}}{(2n)!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-25)^n}{(2n)!} x^{2n} =$$
$$= 1 - \frac{25}{2} x^2 + \frac{625}{24} x^4 - \dots$$

Mivel a $\cos$ függvény hatványsora minden $x \in \mathbb{R}$-re konvergens, így a $\cos(5x)$ függvényé is, azaz a konvergenciasugár végtelen.

2. feladat (b)

Írjuk fel a e^{-x^2} függvény $x_0 = 0$ pont körüli Taylor-sorát. Határozzuk meg a sor konvergenciasugarát is.

2. feladat (b)

Írjuk fel a e^{-x^2} függvény $x_0 = 0$ pont körüli Taylor-sorát. Határozzuk meg a sor konvergenciasugarát is.

Mivel $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, így

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n} = 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^6 + \dots$$

Mivel az e^x hatványsora minden $x \in \mathbb{R}$-re konvergens, így az e^{-x^2} függvényé is, azaz a konvergenciasugár végtelen.

2. feladat (c)

Írjuk fel a $\dfrac{x}{4+x^2}$ függvény $x_0 = 0$ pont körüli Taylor-sorát. Határozzuk meg a sor konvergenciasugarát is.

2. feladat (c)

Írjuk fel a $\dfrac{x}{4+x^2}$ függvény $x_0 = 0$ pont körüli Taylor-sorát. Határozzuk meg a sor konvergenciasugarát is.

Itt azt használjuk fel, hogy $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$, ha $|x| < 1$.

$$\frac{x}{4+x^2} = \frac{x}{4} \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{4}} = \frac{x}{4} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{x^2}{4}\right)} = \frac{x}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x^2}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} x^{2n+1} =$$

$$= \frac{x}{4} - \frac{x^3}{16} + \frac{x^5}{64} - \frac{x^7}{256} + \ldots,$$

ha $\left|-\dfrac{x^2}{4}\right| < 1$, azaz $|x| < 2$, ami azt jelenti, hogy a konvergenciasugár 2.

2. feladat (d)

Írjuk fel a $\dfrac{x+1}{x+3}$ függvény $x_0 = 0$ pont körüli Taylor-sorát. Határozzuk meg a sor konvergenciasugarát is.

2. feladat (d)

Írjuk fel a $\dfrac{x+1}{x+3}$ függvény $x_0 = 0$ pont körüli Taylor-sorát. Határozzuk meg a sor konvergenciasugarát is.

Itt egy kicsit alakítani kell először:

$$\frac{x+1}{x+3} = \frac{x+3-2}{x+3} = 1 - \frac{2}{x+3}$$

A $\dfrac{2}{x+3}$ már hasonló a (c) feladathoz:

$$\frac{2}{x+3} = \frac{2}{3+x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{x}{3}\right)} = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2}{3^{n+1}} x^n,$$

ami $\left|-\dfrac{x}{3}\right| < 1$, azaz $|x| < 3$ esetén konvergens. Ebből:

$$\frac{x+1}{x+3} = 1 - \frac{2}{x+3} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2}{3^{n+1}} x^n = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2}{3^{n+1}} x^n =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{9}x - \frac{2}{27}x^2 + \dots \qquad |x| < 3$$

A konstanstagokat (1-et és a szumma $n = 0$ tagját) összevontuk.

2. feladat (d) másik megoldás

Írjuk fel a $\dfrac{x+1}{x+3}$ függvény $x_0 = 0$ pont körüli Taylor-sorát. Határozzuk meg a sor konvergenciasugarát is.

2. feladat (d) másik megoldás

Írjuk fel a $\dfrac{x+1}{x+3}$ függvény $x_0 = 0$ pont körüli Taylor-sorát. Határozzuk meg a sor konvergenciasugarát is.

Kicsit másképpen is nekikezdhetünk, de persze a lépések hasonlóak az előző megoldáshoz:

$$\frac{x+1}{x+3} = \frac{x}{x+3} + \frac{1}{x+3} = \frac{x}{3} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{x}{3}\right)} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{x}{3}\right)} =$$

$$= \frac{x}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{3}\right)^n + \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} x^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3^n} x^n + \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} x^n = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3^n} \left(1 - \frac{1}{3}\right) x^n =$$

$$= \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot 2}{3^{n+1}} x^n = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} x - \frac{2}{27} x^2 + \dots,$$

ami $\left|-\dfrac{x}{3}\right| < 1$, azaz $|x| < 3$ esetén konvergens.

3. feladat (a)

Számoljuk ki $\sin 1$ értékét 3 tizedesjegy pontossággal.

3. feladat (a)

Számoljuk ki $\sin 1$ értékét 3 tizedesjegy pontossággal.

Mivel $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, így

$$\sin 1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \dots = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040} + \dots$$

Ez egy Leibniz-sor, így a sor egy részletösszegének az összegtől való eltérését a következő tag abszolút értékével becsülhetjük. Mivel három tizedesjegy pontossággal szeretnénk becsülni, így egy ezrednél kisebb hibát szeretnék, azaz az $\frac{1}{5040}$ taggal becsülhetünk:

$$\left| \sin 1 - \left(1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} \right) \right| = \left| \sin 1 - \frac{101}{120} \right| < \frac{1}{5040}$$

Tehát $\sin 1 \approx \frac{101}{120} = 0{,}84166666\dots$ Valójában $\sin 1 = 0{,}841470985\dots$, tehát az első három tizedesjegy tényleg azonos.

3. feladat (b)

Számoljuk ki $\dfrac{1}{e}$ értékét 3 tizedesjegy pontossággal.

3. feladat (b)

Számoljuk ki $\dfrac{1}{e}$ értékét 3 tizedesjegy pontossággal.

Az $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ hatványsorból:

$$e^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} - \frac{1}{5040} + \dots$$

Ez is egy Leibniz-sor, így hasonlóan becsülhetünk, mint az előző feladatrésznél.
Az $1 - 1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{24} - \dfrac{1}{120} + \dfrac{1}{720} = \dfrac{265}{720}$ részletösszegből

$$\left|\frac{1}{e} - \frac{265}{720}\right| < \frac{1}{5040}.$$

Tehát $\dfrac{1}{e} \approx \dfrac{265}{720} = \dfrac{53}{144} = 0{,}3680555\dots$, míg $\dfrac{1}{e} = 0{,}367879441\dots$. Kerekítve itt is megegyezik az első három tizedesjegy.

Házi feladatok

1. Állapítsuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+1)^n}{3^{n+1}}$ hatványsor konvergenciatartományát.
2. Írjuk fel az $f(x) = x\sin(2x)$ függvény $x_0 = 0$ pont körüli Taylor-sorát.
3. Számoljuk ki $\cos(0{,}1)$ értékét 4 tizedesjegy pontossággal.

Házi feladatok végeredményei

1. $(-4, 2)$
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n \cdot 2}{(2n+1)!} x^{2n+2} = 2x^2 - \frac{4}{3}x^4 + \frac{4}{15}x^6 - \dots$
3. $1 - \dfrac{0{,}1^2}{2} = 0{,}995$