3. gyakorlat
Lineáris összefüggőség és mátrixok

F1. Lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorok?

$$\text{(a)}\quad \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}; \qquad \text{(b)}\quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

F2. Az alábbi mátrixok közül melyeket tudjuk összeszorozni? Számítsuk ki néhány szorzás eredményét! Írjuk fel a mátrixok transzponáltját is!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

F3. Egy cég három gyárában négyféle terméket állít elő. Az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrix a_{ij} eleme jelentse az i-edik gyárban egy nap alatt előállított j-edik termék számát. A

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \\ 50 \\ 20 \end{bmatrix}$$

vektor j-edik koordinátája a j-edik termék egységára. Mi a jelentése a következő szorzatoknak?

(a) $\mathbf{Ap}$;

(b) $\mathbf{Ae}_i$, ahol $\mathbf{e}_i$ a standard bázisvektor;

(c) $\mathbf{1}^\top\mathbf{A}$, ahol $\mathbf{1}$ az az oszlopvektor, amelynek minden koordinátája 1.

Hasonlóan írjuk fel mátrixszorzás segítségével azt a vektort, melynek koordinátái megadják

(d) az egyes gyárak által termelt termékek mennyiségeit.

(e) az i-edik gyár által gyártott termékek számát.

Bónuszfeladatok

F4. Tekintsük az $\mathbb{R}^3$ tér

$$\mathbf{a} = \big(1,\ 3,\ 4\big), \qquad \mathbf{b} = \big(2,\ 7,\ 2\big), \qquad \mathbf{c} = \big(-1,\ 2,\ 1\big)$$

vektorait. Döntsük el, hogy az $\mathbf{x} = \big(-3,\ 1,\ -2\big)$ vektor benne van-e a vektorok által generált — az $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ szimbólummal jelölt — altérben.

F5. Igazoljuk, hogy az $\mathbb{R}^4$ tér

$$M = \big\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ \big|\ x_1 + 3x_2 = 5x_3 - x_4 \big\}$$

részhalmaza egy altér $\mathbb{R}^4$-ben. Hány dimenziós ez az altér? Adjuk meg egy bázisát.

F6. Határozzuk meg mindazon $\mathbf{B}$ mátrixokat, amelyek az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrixszal felcserélhetők.

Házi feladat

F7. Egy kereskedelmi cég n féle terméket forgalmaz m boltjában. Az $\mathbf{A}$ mátrix a_{ij} eleme jelentse a j-edik termék i-edik boltban egy hónap alatt forgalmazott mennyiségét. A $\mathbf{p}$ vektor p_i koordinátája jelölje az i-edik termék egységárát. Az $\mathbf{A}$ mátrix, a $\mathbf{p}$ vektor, az $\mathbf{e}_i$ (a standard bázisvektor), valamint az $\mathbf{1}$ (az az oszlopvektor, amelynek minden koordinátája 1) vektorok segítségével írjuk fel:

(a) a havi bevételt boltonként;

(b) az r-edik bolt havi bevételét;

(c) az r-edik boltban a q-adik áruból eladott mennyiséget;

(d) az egy hónap alatt eladott termékmennyiséget termékenként;

(e) a havi összbevételt.