4. gyakorlat

Lineáris egyenletrendszerek

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet, Geometria Tanszék

2022. március 9.

1. feladat

Oldjuk meg az

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 &= -2 \end{aligned}$$

egyenletrendszert Gauss-eliminációval, majd az együtthatómátrix invertálásával is.

1. feladat

Oldjuk meg az

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 &= -2 \end{aligned}$$

egyenletrendszert Gauss-eliminációval, majd az együtthatómátrix invertálásával is.

Gauss-eliminációs megoldás:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right] \underset{s_3-4s_1}{\overset{s_2-2s_1}{\sim}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \end{array}\right] \overset{s_2/(-3)}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -3 & -4 & 2 \end{array}\right]$$

$$\overset{s_3+3s_2}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right] \overset{s_3/(-2)}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \underset{s_2-\frac{2}{3}s_3}{\overset{s_1-2s_3}{\sim}}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \overset{s_1-s_2}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Tehát a megoldás: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -2$.

1. feladat inverzmátrixszal

Az inverzmátrixot hasonló számolással kapjuk, csak kezdetben a jobb oldalon nem az egyenletek jobb oldala, hanem az egységmátrix áll:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{s_3-4s_1}{\overset{s_2-2s_1}{\sim}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s_2/(-3)}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s_3+3s_2}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right] \overset{s_3/(-2)}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \underset{s_2-\frac{2}{3}s_3}{\overset{s_1-2s_3}{\sim}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \overset{s_1-s_2}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Tehát

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

1. feladat inverzmátrixszal folytatás

Oldjuk meg az

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + 2x_3 &= -1 \\
2x_1 - x_2 + 2x_3 &= -4 \\
4x_1 + x_2 + 4x_3 &= -2
\end{aligned}
$$

egyenletrendszert Gauss-eliminációval, majd az együtthatómátrix invertálásával is.

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}
$$

És ezzel a megoldás:

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}
$$

Ez azt jelenti, hogy $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -2$.

2. feladat

Oldjuk meg a valós számok körében a

$$
\begin{aligned}
3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 2 \\
9x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 &= 5 \\
x_1 - x_2 - x_4 + 2x_5 &= 1 \\
x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 &= 2
\end{aligned}
$$

egyenletrendszert.

2. feladat

Oldjuk meg a valós számok körében a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 2 \\ 9x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 &= 5 \\ x_1 - x_2 - x_4 + 2x_5 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 &= 2 \end{aligned}$$

egyenletrendszert.

Először felírjuk a kibővített együtthatómátrixot:

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 3 & 1 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 9 & 1 & -2 & -1 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \end{array}\right]$$

2. feladat folytatás

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 3 & 1 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 9 & 1 & -2 & -1 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \end{array}\right] \overset{s_1 \leftrightarrow s_3}{\sim} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & -2 & -1 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2 - 9s_1 \\ \sim \\ s_3 - 3s_1 \\ s_4 - s_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & -2 & 8 & -20 & -4 \\ 0 & 4 & -1 & 2 & -6 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right] \overset{s_2 \leftrightarrow s_4}{\sim} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 2 & -6 & -1 \\ 0 & 10 & -2 & 8 & -20 & -4 \end{array}\right] \overset{s_2/2}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 4 & -1 & 2 & -6 & -1 \\ 0 & 10 & -2 & 8 & -20 & -4 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_3 - 4s_2 \\ \sim \\ s_4 - 10s_2 \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 18 & -30 & -9 \end{array}\right] \overset{s_4 - 3s_3}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -10 & -3 \end{array}\right] \overset{s_2 + \frac{1}{2}s_3}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -10 & -3 \end{array}\right] \overset{s_1 + s_2}{\sim} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -10 & -3 \end{array}\right]$$

2. feladat folytatás

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 3 & 1 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 9 & 1 & -2 & -1 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -10 & -3 \end{array}\right]$$

Mivel a negyedik és ötödik oszlopban nincs sor eleji egyes (vezéregyes), így ezek szabad változók (értéküket tetszőlegesen megválaszthatjuk), és ezek függvényében határozzuk meg a többi ismeretlen értékét.

első egyenlet:

$$x_1 + x_4 - 2x_5 = 0$$
$$x_1 = -x_4 + 2x_5$$

második egyenlet:

$$x_2 + 2x_4 - 4x_5 = -1$$
$$x_2 = -1 - 2x_4 + 4x_5$$

harmadik egyenlet:

$$x_3 + 6x_4 - 10x_5 = -3$$
$$x_3 = -3 - 6x_4 + 10x_5$$

Tehát a megoldás:

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_4 + 2x_5 \\ x_2 &= -1 - 2x_4 + 4x_5 \qquad x_4, x_5 \in \mathbb{R} \\ x_3 &= -3 - 6x_4 + 10x_5 \end{aligned}$$

3. feladat

A p és a q valós paraméter függvényében adjuk meg az

$$\mathbf{x}^\top \cdot \mathbf{A} = \mathbf{b}^\top$$

egyenletrendszer összes valós megoldását, ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & p \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2q \\ 4q \\ q \end{bmatrix}.$$

3. feladat

A p és a q valós paraméter függvényében adjuk meg az

$$\mathbf{x}^\top \cdot \mathbf{A} = \mathbf{b}^\top$$

egyenletrendszer összes valós megoldását, ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & p \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2q \\ 4q \\ q \end{bmatrix}.$$

Ha $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, akkor az $\mathbf{x}^\top \cdot \mathbf{A} = \mathbf{b}^\top$ egyenlet azt jelenti, hogy

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2q & 4q & q \end{bmatrix}$$

Ez a következő egyenletrendszert adja:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2q \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 4q \\ 3x_1 - 2x_2 + px_3 &= q \end{aligned}$$

3. feladat folytatás

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2q$$
$$2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4q$$
$$3x_1 - 2x_2 + px_3 = q$$

Ezt Gauss-eliminációval oldhatjuk meg:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2q \\ 2 & -3 & 2 & 4q \\ 3 & -2 & p & q \end{array}\right] \underset{s_3-3s_1}{\overset{s_2-2s_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2q \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & p-3 & -5q \end{array}\right] \overset{s_2/(-5)}{\sim}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2q \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & p-3 & -5q \end{array}\right] \overset{s_3+5s_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2q \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p-3 & -5q \end{array}\right]$$

Ha $p \neq 3$, akkor $x_3 = -\frac{5q}{p-3}$, $x_2 = 0$, és az első egyenletből azt kapjuk, hogy $x_1 = 2q - x_3 = 2q + \frac{5q}{p-3}$.

Ha $p = 3$ de $q \neq 0$, akkor nincs megoldás.

Ha $p = 3$ és $q = 0$, akkor végtelen sok megoldás van, és x_3-at választhatjuk szabad paraméternek. Ekkor $x_2 = 0$ és $x_1 = 2q - x_3$.

Házi feladatok

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket.

(a)

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 5 \\ x + 5y - 2z &= 7 \\ -x + 2y - z &= 3 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 3z &= 4 \\ 3x + 2y + z &= 1 \\ -x + 2y - z &= 5 \end{aligned}$$

Számítsuk ki az alábbi mátrix inverzét.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Bónuszfeladat

A Mini piskóta összetevői: liszt, tojás cukor. A csomagoláson ezek aránya nincs feltüntetve, viszont vannak tápértékadatok. 100 g termékben $11{,}62$ g fehérje, $4{,}99$ g zsír, $82{,}28$ g szénhidrát és $420{,}13$ kalória van. A tápérték adatbázisból kikerestük az összetevők adatait:

100 g	fehérje (g)	zsír (g)	szénhidrát (g)	energia (kalória)
cukor	0	0	100	385
liszt	10	1	76	364
tojás	13	10	1	143

Állapítsuk meg a 100 g kekszhez felhasznált összetevők tömegét!
(Gondoljunk arra is, hogy sütéskor a tészta víztartalma elpárolog.)

Házi feladatok megoldása

(a) nincs megoldás;

(b) $x = -1, y = 2, z = 0.$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 4 & -6 \\ 0 & -2 & 3 \\ -\frac{1}{2} & -3 & 5 \end{bmatrix}$$