

7. gyakorlat

Sajátértékek és sajátvektorok

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet, Geometria Tanszék

2022. március 30.

1. feladat (a)

Határozzuk meg a $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

1. feladat (a)

Határozzuk meg a $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

A sajátértékeket az alábbi determináns nullhelyei adják:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_2) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 6 \\ 3 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (5 - \lambda)(2 - \lambda) - 6 \cdot 3 = \lambda^2 - 7\lambda - 8,$$

melynek a gyökei $\lambda_1 = 8$ és $\lambda_2 = -1$. Ezek a sajátértékek.

Egy λ sajátértékhez a sajátérvektort az $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_2$ együtthatómátrixú homogén lineáris egyenletrendszer megoldásával kaphatjuk meg.

Ez a $\lambda_1 = 8$ esetén a következő:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -3 & 6 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{s_1/(-3)} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{s_2 - 3s_1} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Tehát az x_2 a szabad paraméter, és $x_1 = 2x_2$. Így a sajátvektorok halmaza:

$$\left\{ \left[\begin{array}{c} 2x \\ x \end{array} \right] \mid x \neq 0 \right\}.$$

1. feladat (a) – folytatás

Határozzuk meg a $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

A $\lambda_2 = -1$ esetben hasonlóan számolhatunk:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 6 & 6 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{s_1/6} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{s_2-3s_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Tehát az x_2 a szabad paraméter, és $x_1 = -x_2$. Így a sajátvektorok halmaza:

$$\left\{ \left[\begin{array}{c} -x \\ x \end{array} \right] \mid x \neq 0 \right\}.$$

1. feladat (b)

Határozzuk meg a $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

1. feladat (b)

Határozzuk meg a $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

A sajátértékeket az alábbi determináns nullhelyei adják:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_3) &= \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 2 & -5 \\ -1 & 1 - \lambda & 1 \\ 2 & 2 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= (4 - \lambda)(1 - \lambda)(-3 - \lambda) + 4 + 10 + 10(1 - \lambda) + 2(-3 - \lambda) - 2(4 - \lambda) = \\ &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 11\lambda - 12 + 14 + 10 - 10\lambda - 6 - 2\lambda - 8 + 2\lambda = \\ &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 \end{aligned}$$

Ennek a racionális gyökei a -2 osztói közül kerülnek ki, így próbálgatással azt találjuk, hogy $\lambda_1 = 1$ gyök, melyet így kiemelhetünk:

$$-\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + \lambda + 2)$$

A kapott másodfokú polinomnak a gyökei: $\lambda_2 = -1$ és $\lambda_3 = 2$.
Tehát a mátrix sajátértékei: $1, -1, 2$.

1. feladat (b) első sajátérték

Határozzuk meg a $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

$\lambda_1 = 1$ sajátértékhez sajátvektor:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{s_1 \leftrightarrow s_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -5 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{s_1/(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -5 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{array} \right] & \begin{array}{l} s_2 - 3s_1 \\ \sim \\ s_3 - 2s_1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{s_2/2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{s_3 - 2s_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Tehát x_3 a szabad paraméter, és $x_1 = x_3$ és $x_2 = x_3$.

Így a $\lambda_1 = 1$ sajátértékekhez tartozó sajátvektorok halmaza:

$$\left\{ \left[\begin{array}{c} x \\ x \\ x \end{array} \right] \mid x \neq 0 \right\}$$

1. feladat (b) második sajátérték

Határozzuk meg a $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

Hasonlóan $\lambda_2 = -1$ esetén:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & -5 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{s_1 \leftrightarrow s_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -5 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{s_1/(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & -5 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right] & \begin{array}{l} s_2 - 5s_1 \\ \sim \\ s_3 - 2s_1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{s_2/12} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{array} \right] & \begin{array}{l} s_1 + 2s_2 \\ \sim \\ s_3 - 6s_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Tehát $x_2 = 0$, és x_3 a szabad paraméter, és $x_1 = x_3$.

Így a $\lambda_2 = -1$ sajátértékekhez tartozó sajátvektorok halmaza:

$$\left\{ \left[\begin{array}{c} x \\ 0 \\ x \end{array} \right] \mid x \neq 0 \right\}$$

1. feladat (b) harmadik sajátérték

Határozzuk meg a $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

Végül $\lambda_3 = 2$ esetén:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -5 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -5 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{s_3-s_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -5 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{s_1 \leftrightarrow s_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ & \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{s_1/(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{s_2-2s_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{s_2/(-3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{s_1+s_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Tehát $x_3 = 0$ és x_2 a szabad paraméter, és $x_1 = -x_2$.

Így a $\lambda_3 = 2$ sajátértékekhez tartozó sajátvektorok halmaza:

$$\left\{ \left[\begin{array}{c} -x \\ x \\ 0 \end{array} \right] \mid x \neq 0 \right\}$$

2. feladat

Határozzuk meg a $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit, és az egyik sajátértékhez számítsuk ki a sajátvektorokat.

2. feladat

Határozzuk meg a $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit, és az egyik sajátértékhez számítsuk ki a sajátvektorokat.

A sajátértékeket az alábbi determináns nullhelyei adják:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_3) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= (-\lambda)(2 - \lambda)(4 - \lambda) + 0 + 0 - 0 + 2(4 - \lambda) - 0 = \\ &= (4 - \lambda)((-\lambda)(2 - \lambda) + 2) = (4 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) \end{aligned}$$

Így $\lambda_1 = 4$ sajátérték. A másik két sajátérték a $\lambda^2 - 2\lambda + 2$ polinom gyökei:

$$\lambda_{2,3} = \frac{+2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{+2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

Tehát a sajátértékek: $4, 1 + i, 1 - i$.

2. feladat – folytatás

$\lambda = 4$ -hez sajátvektor:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{s_1 \leftrightarrow s_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{s_1/(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{s_2+4s_1} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{s_2/10} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{s_3-s_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{s_1-2s_2} \\ & & & & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Tehát x_3 szabad paraméter, és $x_1 = x_2 = 0$.

Így a $\lambda = 4$ sajátértékekhez tartozó sajátvektorok halmaza:

$$\left\{ \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ x \end{array} \right] \mid x \neq 0 \right\}$$

3. feladat

A $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix melyik sajátértékéhez tartozik a $(3, 0, -2)$ vektor?

3. feladat

A $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix melyik sajátértékéhez tartozik a $(3, 0, -2)$ vektor?

Az \mathbf{A} mátrix \mathbf{v} sajátvektorára: $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, ahol λ a sajátérték.

Számoljuk ki a mátrix és a vektor szorzatát:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix},$$

ami az eredeti vektor (-3) -szoros, tehát ez a vektor a -3 sajátértékhez tartozó sajátvektor.

4. feladat

Tudjuk, hogy az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ a & 4 \end{bmatrix}$ mátrix egyik sajátvektora $\mathbf{v}_1 = (1, 2)$.

Határozzuk meg az a paraméter értékét, a sajátértékeket, és a másik sajátvektort.

4. feladat

Tudjuk, hogy az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ a & 4 \end{bmatrix}$ mátrix egyik sajátvektora $\mathbf{v}_1 = (1, 2)$.

Határozzuk meg az a paraméter értékét, a sajátértékeket, és a másik sajátvektort.

Ha λ_1 a \mathbf{v}_1 sajátvektorhoz tartozó sajátérték, akkor $\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1$, azaz

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ a & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ a+8 \end{bmatrix},$$

amiből $\lambda_1 = 3$, és ekkor $a+8 = 3 \cdot 2$, amiből $a = -2$.

Innen az előző feladatokhoz hasonlóan kiszámolhatjuk az \mathbf{A} mátrix sajátértékeit:

$$\det \begin{pmatrix} 7-\lambda & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (7-\lambda)(4-\lambda) - (-2) \cdot (-2) = \lambda^2 - 11\lambda + 24,$$

melynek a másik gyöke: $\lambda_2 = 8$. Ehhez sajátvektor:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{s_1/(-1)} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{s_2+2s_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Így a sajátvektorok halmaza: $\left\{ \left[\begin{array}{c} -2x \\ x \end{array} \right] \mid x \neq 0 \right\}$.

5. feladat

Írjuk fel annak a térbeli transzformációnak a mátrixát, mely az x tengely körül 120° -kal forgat, majd a z tengely körül 90° -kal forgat. A kompozíció milyen tengely körüli forgatás?

5. feladat

Írjuk fel annak a térbeli transzformációnak a mátrixát, mely az x tengely körül 120° -kal forgat, majd a z tengely körül 90° -kal forgat. A kompozíció milyen tengely körüli forgatás?

Az x tengely körüli 120° -os forgatás mátrixa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(120^\circ) & -\sin(120^\circ) \\ 0 & \sin(120^\circ) & \cos(120^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

A z tengely körüli 90° -os forgatás mátrixa:

$$\begin{bmatrix} \cos(90^\circ) & -\sin(90^\circ) & 0 \\ \sin(90^\circ) & \cos(90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A két forgatás kompozíciójához tartozó mátrix:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

A transzformáció tengelye fix, így az iránya az 1 sajátértékhez tartozó sajátvektor.

5. feladat – folytatás

$$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 0 - \lambda & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 \left(-\frac{1}{2} - \lambda \right) + 0 + \frac{3}{4} - 0 - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} - \lambda \right) - 0 =$$
$$= -\lambda^3 - \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda + 1 = (\lambda - 1) \left(-\lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda - 1 \right)$$

Tehát $\lambda = 1$ valóban sajátérték, míg a másik kettő nem valós.

Az 1-hez tartozó sajátvektor:

$$\begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & | & 0 \\ 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{3}{2} & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{s_1 \leftrightarrow s_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & | & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{3}{2} & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{s_2 + s_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & | & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{3}{2} & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{s_2 \cdot (-2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} & | & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{3}{2} & | & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} & | & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{3}{2} & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{s_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}s_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{s_1 + s_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{3} & | & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

x_3 szabad paraméter, $x_1 = x_2 = \sqrt{3}x_3$, így a sajátvektorok: $\left\{ \begin{bmatrix} \sqrt{3}x \\ \sqrt{3}x \\ x \end{bmatrix} \mid x \neq 0 \right\}$,
így a tengely a $(\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1)$ vektor egyenese

Bónuszfeladat

A $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix nem valós sajátértékeihez számítsuk ki a sajátvektorokat.

Házi feladat

Határozzuk meg a $\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátvektorokat.

Házi feladat megoldása

A karakterisztikus egyenlet: $-\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda$, melynek gyökei $0, 2, -1$ a sajátértékek.

0-hoz tartozó sajátvektorok: $\left\{ \left[\begin{array}{c} -2x \\ x \\ 0 \end{array} \right] \mid x \neq 0 \right\},$

2-höz tartozó sajátvektorok: $\left\{ \left[\begin{array}{c} -2x \\ x \\ 2x \end{array} \right] \mid x \neq 0 \right\},$

-1-hez tartozó sajátvektorok: $\left\{ \left[\begin{array}{c} -x \\ -x \\ x \end{array} \right] \mid x \neq 0 \right\}.$