

11. gyakorlat

Lokális szélsőértékek

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet, Geometria Tanszék

2022. április 13.

1. feladat (a)

Határozzuk meg a $f(x, y) = 4x^2 + 2xy + 5y^2 + 2$ függvény lokális szélsőértékeit!

1. feladat (a)

Határozzuk meg a $f(x, y) = 4x^2 + 2xy + 5y^2 + 2$ függvény lokális szélsőértékeit!

Először kiszámoljuk a függvény elsőrendű parciális deriváltjait:

$$f'_x(x, y) = 8x + 2y$$

$$f'_y(x, y) = 2x + 10y$$

Megkeressük azokat a pontokat (stacionárius pontok), ahol mindkettő nulla:

$$8x + 2y = 0 \quad \Rightarrow y = -4x$$

$$2x + 10y = 0 \quad \Rightarrow -38x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0$$

Egyetlen stacionárius pont van, a $(0, 0)$.

Még meg kell nézni, hogy ez valóban lokális szélsőérték-e, amihez a Hesse-féle determinánst kell felírni a másodrendű parciális deriváltakból.

$$f''_{xx}(x, y) = 8 \quad f''_{xy}(x, y) = 2 \quad f''_{yy}(x, y) = 10$$

Ebből a Hesse-féle determináns:

$$f''_{xx}(x, y)f''_{yy}(x, y) - (f''_{xy}(x, y))^2 = 8 \cdot 10 - 2^2 = 76,$$

ami minden pontban pozitív, így a $(0, 0)$ -ban van lokális szélsőérték, és mivel $f''_{xx}(0, 0) = 8$ pozitív, így lokális minimum. A lokális minimum értéke: $f(0, 0) = 2$.

1. feladat (b)

Határozzuk meg a $f(x, y) = y^4 - 3y + x^2y + 2xy$ függvény lokális szélsőértékeit!

1. feladat (b)

Határozzuk meg a $f(x, y) = y^4 - 3y + x^2y + 2xy$ függvény lokális szélsőértékeit!

Ugyanazokat a lépéseket kell megcsinálnunk, mint az (a) feladatban:

$$f'_x(x, y) = 2xy + 2y \qquad 2xy + 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y(x + 1) = 0$$

$$f'_y(x, y) = 4y^3 - 3 + x^2 + 2x \quad 4y^3 - 3 + x^2 + 2x = 0 \quad y = 0 \quad x = -1$$

$y = 0$ esetén a második egyenlet $-3 + x^2 + 2x = 0$, aminek a két gyöke 1 és -3 .

$x = -1$ esetén a második egyenlet $4y^3 - 3 + 1 - 2 = 0$, azaz $y^3 = 1$, azaz $y = 1$.

Tehát három stacionárius pont van: $(1, 0)$, $(-3, 0)$ és $(-1, 1)$.

A Hesse-determinánshoz a másodrendű parciális deriváltak:

$$f''_{xx}(x, y) = 2y \qquad f''_{xy}(x, y) = 2x + 2 \qquad f''_{yy}(x, y) = 12y^2$$

Ebből a Hesse-determináns:

$$f''_{xx}(x, y)f''_{yy}(x, y) - (f''_{xy}(x, y))^2 = 2y \cdot 12y^2 - (2x + 2)^2 = 24y^3 - (2x + 2)^2$$

$(1, 0)$ -ban: $24 \cdot 0 - (2 + 2)^2 = -16 < 0$, ez nem lokális szélsőérték (nyeregpont)

$(-3, 0)$ -ban: $24 \cdot 0 - (2 \cdot (-3) + 2)^2 = -16 < 0$, nem lok. szélsőérték (nyeregpont)

$(-1, 1)$ -ban: $24 \cdot 1^3 - (2 \cdot (-1) + 2)^2 = 24 > 0$, ez lokális szélsőérték

Mivel $f''_{xx}(-1, 1) = 2 > 0$, ez lokális minimumhely.

A lokális minimum értéke: $f(-1, 1) = 1 - 3 + 1 - 2 = -3$.

1. feladat (c)

Határozzuk meg a $f(x, y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - e^y$ függvény lokális szélsőértékeit!

1. feladat (c)

Határozzuk meg a $f(x, y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - e^y$ függvény lokális szélsőértékeit!

Az elsőrendű parciális deriváltak:

$$\begin{array}{lll} f'_x(x, y) = 2 - 2x & 2 - 2x = 0 & x = 1 \\ f'_y(x, y) = 2 - e^y & 2 - e^y = 0 & y = \ln 2 \end{array}$$

Tehát az egyetlen stacionárius pont az $(1, \ln 2)$.

$$f''_{xx}(x, y) = -2 \quad f''_{xy}(x, y) = 0 \quad f''_{yy}(x, y) = -e^y$$

A Hesse-determináns:

$$f''_{xx}(x, y)f''_{yy}(x, y) - (f''_{xy}(x, y))^2 = (-2) \cdot (-e^y) - 0^2 = 2e^y,$$

ami az $(1, \ln 2)$ pontban $2e^{\ln 2} = 2 \cdot 2 = 4 > 0$, így itt van szélsőérték.

Mivel $f''_{xx}(1, \ln 2) = -2 < 0$, így ez lokális maximum.

A lokális maximum értéke:

$$f(1, \ln 2) = 2 + 2 + 2 \ln 2 - 1 - 2 = 1 + 2 \ln 2 \approx 2,386$$

2. feladat

Egy $V = 4,5 \text{ dm}^3$ térfogatú téglatest alakú dobozt hosszában egyszer, keresztben pedig kétszer átkötünk egy zsineggel. Mekkora legyen a csomag szélessége, hossza és magassága, hogy a legkevesebb zsinetet kelljen felhasználni?

2. feladat

Egy $V = 4,5 \text{ dm}^3$ térfogatú téglatest alakú dobozt hosszában egyszer, keresztben pedig kétszer átkötünk egy zsineggel. Mekkora legyen a csomag szélessége, hossza és magassága, hogy a legkevesebb zsinetet kelljen felhasználni?

Legyen a téglatest oldalhosszai a, b, c (deciméterben mérve). Ekkor a térfogat

$$abc = 4,5, \text{ amiből } c = \frac{4,5}{ab}.$$

Ha a a leghosszabb oldal, akkor ha hosszában kötjük át a csomagot, akkor annak a hossza $2(a + b)$, és ha keresztben, akkor $2(b + c)$. Mivel keresztben kétszer kötjük át, így összesen

$$2(a + b) + 2 \cdot 2(b + c) = 2a + 6b + 4c$$

zsineg szükséges. Felhasználva, hogy $c = \frac{4,5}{ab}$, az

$$f(a, b) = 2a + 6b + 4c = 2a + 6b + 4 \cdot \frac{4,5}{ab} = 2a + 6b + \frac{18}{ab}$$

függvényt kell minimalizálni.

2. feladat folytatás

$$f(a, b) = 2a + 6b + \frac{18}{ab}$$

Az elsőrendű parciális deriváltak:

$$f'_a(a, b) = 2 - \frac{18}{a^2b} \quad 2 - \frac{18}{a^2b} = 0 \quad a^2b = 9$$

$$f'_b(a, b) = 6 - \frac{18}{ab^2} \quad 6 - \frac{18}{ab^2} = 0 \quad ab^2 = 3$$

Ekkor $a^3b^3 = 27$, amiből $ab = \sqrt[3]{27} = 3$. Tehát

$$a = \frac{a^2b}{ab} = \frac{9}{3} = 3, \quad b = \frac{ab^2}{ab} = \frac{3}{3} = 1, \quad c = \frac{4,5}{ab} = \frac{4,5}{3} = \frac{3}{2} = 1,5$$

A másodrendű parciális deriváltak a Hesse-determinánshoz:

$$f''_{aa}(a, b) = \frac{36}{a^3b} \quad f''_{ab}(a, b) = \frac{18}{a^2b^2} \quad f''_{bb}(a, b) = \frac{36}{ab^3}$$

A Hesse-determináns:

$$f''_{aa}(a, b)f''_{bb}(a, b) - (f''_{ab}(a, b))^2 = \frac{36}{a^3b} \cdot \frac{36}{ab^3} - \left(\frac{18}{a^2b^2}\right)^2 = \frac{36^2 - 18^2}{a^4b^4} > 0$$

Mivel $f''_{aa}(3, 1)$ is pozitív, így ez lokális minimum. Tehát tényleg ezen adatokhoz tartozó csomaghoz kell a lehető legkevesebb zsinég.

3. feladat

Felül nyitott, téglatest alakú dobozt készítünk, melynek térfogata 1 m^3 .
Mekkora legyen éleinek hosszúsága, hogy elkészítéséhez a lehető legkevesebb anyagot használjuk fel?

3. feladat

Felül nyitott, téglatest alakú dobozt készítünk, melynek térfogata 1 m^3 . Mekkora legyen éleinek hosszúsága, hogy elkészítéséhez a lehető legkevesebb anyagot használjuk fel?

Jelölje a téglatest oldalait a, b, c méterben mérve. Így a térfogat

$$abc = 1, \text{ amiből } c = \frac{1}{ab}.$$

Ha c a magasság, akkor az alaplapp területe ab , míg az oldallapoké ac , illetve bc . Mivel két-két ugyanolyan oldallap van, így a felhasznált anyag:

$$f(a, b) = ab + 2ac + 2bc = ab + 2a \frac{1}{ab} + 2b \frac{1}{ab} = ab + \frac{2}{b} + \frac{2}{a}$$

3. feladat folytatás

$$f(a, b) = ab + \frac{2}{b} + \frac{2}{a}$$

Ennek elsőrendű parciális deriváltjai:

$$f'_a(a, b) = b - \frac{2}{a^2} \qquad b - \frac{2}{a^2} = 0 \qquad a^2b = 2$$

$$f'_b(a, b) = a - \frac{2}{b^2} \qquad a - \frac{2}{b^2} = 0 \qquad ab^2 = 2$$

Ekkor $a^3b^3 = 4$, amiből $ab = \sqrt[3]{4} = 2^{\frac{2}{3}}$. Tehát

$$a = \frac{a^2b}{ab} = \frac{2}{2^{\frac{2}{3}}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}, \quad b = \frac{ab^2}{ab} = \frac{2}{2^{\frac{2}{3}}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}, \quad c = \frac{1}{ab} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = 2^{-\frac{2}{3}}$$

A másodrendű parciális deriváltak a Hesse-determinánshoz:

$$f''_{aa}(a, b) = \frac{4}{a^3} \qquad f''_{ab}(a, b) = 1 \qquad f''_{bb}(a, b) = \frac{4}{b^3}$$

A Hesse-determináns:

$$f''_{aa}(a, b)f''_{bb}(a, b) - (f''_{ab}(a, b))^2 = \frac{4}{a^3} \frac{4}{b^3} - 1 = \frac{16}{a^3b^3} - 1,$$

ami a $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$ pontban $3 > 0$. Mivel $f''_{aa}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}) = 2 > 0$, így ez lok. minimum. Tehát tényleg ezen adatokhoz tartozó téglatesthez kell a lehető legkevesebb anyag.

Bónuszfeladat

A $z = 2x^2 + y^2$ felület és a $z = 5$ sík által határolt térrészbe a lehető legnagyobb térfogatú hasábot írjuk. Mekkora ennek a hasábnak a térfogata?

Házi feladatok

1. Határozzuk meg az $f(x, y) = \frac{xy}{27} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ függvény lokális szélsőértékeit.
2. Egy 1 m^3 térfogatú téglatest alját és tetejét két rétegben, a többi oldalát egy rétegben befestjük. Milyen hosszúak legyenek a téglatest oldalélei, hogy a lehető legkevesebb festék kelljen ehhez?

Házi feladatok végeredménye

1. $(3, 3)$ -ban lokális minimum, értéke 1.
2. Ha a, b, c jelöli az oldalakat, akkor $abc = 1$ és a festett felület nagysága:

$$4ab + 2bc + 2ac = 4ab + \frac{2}{a} + \frac{2}{b}$$

A parciális deriváltak eltűnéséből $a = b = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ és $c = \sqrt[3]{4}$.

A Hesse-determináns ebben az esetben pozitív, így ez lokális szélsőérték, és mivel f''_{aa} pozitív, így lokális minimum.