

1. Számítsuk ki az alábbi mátrix determinánsát.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. A $\begin{bmatrix} p & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix egyik sajátvektora $(1, -1)$. Határozzuk meg a p paraméter értékét és a mátrix másik sajátértékéhez tartozó sajátvektorokat.
3. Számoljuk ki az $f(x, y) = \frac{\cos(xy)}{x}$ függvény $(2, 0)$ pontbeli $\mathbf{v} = (2, -1)$ irányú deriváltját. Mennyi az iránymenti derivált maximuma ebben a pontban?
4. Keressük meg az $f(x, y) = x^4 + x^2y - xy - 2y + 19x + 13$ függvény lokális szélsőértékeit.

1. Legfeljebb hány lineárisan független vektor választható ki az alábbi vektorok közül?

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2. Számítsuk ki az alábbi mátrix sajátértékeit, és az egyik sajátértékhez tartozó sajátvektorokat.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

3. Írjuk fel az $f(x, y, z) = (3x^2y \cos(2z), y - e^z)$ függvény $(-2, 1, 0)$ pontbeli Jacobi-mátrixát.
4. Téglatest alakú 3 literes díszdobozt készítünk. A felső éleket piros, az oldalsó éleket kék csíkkal díszítjük (az alsó éleket nem díszítjük). A piros csík egységára 2 peták, míg a kéké 9 peták. Hogyan méretezzük a dobozt, hogy a lehető legolcsóbb legyen a díszítés?

Jó munkát!

Végeredmények

1. -12

2. $p = -2$, a sajátértékek: -3 és 3 . A 3 -hoz tartozó sajátvektorok: $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ 5x \end{bmatrix} \middle| x \neq 0 \right\}$.

3. Iránymenti derivált: $-\frac{1}{2\sqrt{5}}$, maximuma: $\frac{1}{4}$.

4. Stacionárius pontok: $(-1, 5)$ és $(2, -17)$, mindkettő nyeregpont, így nincs lokális szélsőértéke a függvénynek.

1. Két lineárisan független vektor választható ki.

2. Sajátértékek: $1, 4, 7$. Sajátvektorok (elegendő csak az egyikhez kiszámolni):

$$\lambda = 1 : \left\{ \begin{bmatrix} -x \\ x \\ x \end{bmatrix} \middle| x \neq 0 \right\}, \quad \lambda = 4 : \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{bmatrix} \middle| x \neq 0 \right\}, \quad \lambda = 7 : \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ 2x \end{bmatrix} \middle| x \neq 0 \right\}.$$

3. $\begin{bmatrix} -12 & 12 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

4. Szélesség és hosszúság 3 , míg a magasság $\frac{1}{3}$ deciméter.