

1. előadás

Halmazok, intervallumok, egyenletek és egyenlőtlenségek

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2023. szeptember 5.

Halmazok

Néhány nevezetes halmaz:

- ▶ \emptyset üres halmaz
- ▶ \mathbb{N} természetes számok *0 benne van?*
- ▶ \mathbb{Z} egész számok
- ▶ \mathbb{Q} racionális számok
- ▶ \mathbb{R} valós számok
- ▶ \mathbb{C} komplex számok (*nem kell tudni, majd második félévben*)

Néhány halmazművelet:

A és B halmaz

- ▶ $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ vagy } x \in B\}$ unió
- ▶ $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \in B\}$ metszet
- ▶ $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \notin B\}$ kivonás

Ha H az alaphalmaz, akkor $\overline{A} = H \setminus A$ komplementer.

Az A és a B halmaz diszjunkt, ha nincs közös elemük: $A \cap B = \emptyset$.

Halmazok folytatás

Részhalmaz: $B \subseteq A$, ha B minden eleme benne van A -ban, azaz

$$x \in B \Rightarrow x \in A.$$

Szigorú részhalmaz: $B \subset A$ vagy $B \subsetneq A$, ha $B \subseteq A$, de $A \neq B$

Az A és a B halmazok **Descartes-szorzata:**

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Példa:

Legyen $A = \{1; 2\}$ és $B = \{2; 3\}$.

Mi lesz $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \times B$, $B \times A$ és $(A \times B) \setminus (B \times A)$?

Halmazok folytatás

Részhalmaz: $B \subseteq A$, ha B minden eleme benne van A -ban, azaz

$$x \in B \Rightarrow x \in A.$$

Szigorú részhalmaz: $B \subset A$ vagy $B \subsetneq A$, ha $B \subseteq A$, de $A \neq B$

Az A és a B halmazok **Descartes-szorzata:**

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Példa:

Legyen $A = \{1; 2\}$ és $B = \{2; 3\}$.

Mi lesz $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \times B$, $B \times A$ és $(A \times B) \setminus (B \times A)$?

$$A \cup B = \{1; 2; 3\}.$$

$$A \cap B = \{2\}.$$

$$A \setminus B = \{1\}.$$

$$A \times B = \{(1, 2); (1, 3); (2, 2); (2, 3)\}$$

$$B \times A = \{(2, 1); (2, 2); (3, 1); (3, 2)\}$$

$$(A \times B) \setminus (B \times A) = \{(1, 2); (1, 3); (2, 3)\}$$

Intervallumok

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	zárt intervallum
$(a, b) =]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	nyílt intervallum
$[a, b) = [a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	félíg nyílt, félíg zárt intervallum
	jobbról nyílt, balról zárt intervallum
$(a, b] =]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	félíg nyílt, félíg zárt intervallum
	jobbról zárt, balról nyílt intervallum

A fentiekben a és b lehet végtelen is, de ekkor azon a végén csak nyílt lehet:

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$	nyílt intervallum
$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$	zárt intervallum
$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	nyílt intervallum
$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$	zárt intervallum
$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$	valós számok

Egy $x \in \mathbb{R}$ valós szám $\varepsilon > 0$ sugarú környezete:

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$$

Egy egyenlet

Oldjuk meg az $x + 1 = \sqrt{7 + x}$ egyenletet a valós számok halmazán!

Egy egyenlet

Oldjuk meg az $x + 1 = \sqrt{7 + x}$ egyenletet a valós számok halmazán!

$$x + 1 = \sqrt{7 + x} \quad \text{négyzetre emelés:}$$

\Downarrow

$$(x + 1)^2 = 7 + x \quad \text{kifejtés:}$$

\Updownarrow

$$x^2 + 2x + 1 = 7 + x \quad \text{átrendezés:}$$

\Updownarrow

$$x^2 + x - 6 = 0$$

Másodfokú megoldóképlet:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-6)}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{matrix} 2 \\ -3 \end{matrix}$$

Visszahelyettesítve az $x_1 = 2$ megoldás, míg az $x_2 = -3$ nem, a négyzetre emelés során nyertük ezt a hamis gyököt.

Még egy egyenlet

Oldjuk meg az $\frac{x^2 + x}{x + 3} = x$ egyenletet a valós számok halmazán.

Még egy egyenlet

Oldjuk meg az $\frac{x^2 + x}{x + 3} = x$ egyenletet a valós számok halmazán.

Mivel a nevezőben $x + 3$ áll, ami nem lehet nulla, így $x \neq -3$.

Szorozzunk be $(x + 3)$ -mal:

$$x^2 + x = x(x + 3)$$

$$x^2 + x = x^2 + 3x$$

$$0 = 2x$$

$$x = 0$$

Tehát a megoldás $x = 0$ (ami nem -3).

Egy egyenlőtlenség

Oldjuk meg a $|2x + 3| \leq 5$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

Egy egyenlőtlenség

Oldjuk meg a $|2x + 3| \leq 5$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

A $|2x + 3| \leq 5$ egyenlőtlenség pontosan azt jelenti, hogy

$$-5 \leq 2x + 3 \leq 5$$

$$-8 \leq 2x \leq 2$$

$$-4 \leq x \leq 1$$

Tehát a megoldás a $[-4, 1]$ intervallum.

Még egy egyenlőtlenség

Oldjuk meg az $\frac{1}{x+3} \leq 2$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

Még egy egyenlőtlenség

Oldjuk meg az $\frac{1}{x+3} \leq 2$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

Megint kikötjük, hogy $x \neq -3$. Két eset lehetséges $x+3$ előjele szerint:

1. eset $x+3$ pozitív, azaz $-3 < x$. 2. eset $x+3$ negatív, azaz $-3 > x$.

Ekkor $(x+3)$ -mal beszorozva nem változik az egyenlőtlenség iránya:

Ekkor $(x+3)$ -mal beszorozva megfordul az egyenlőtlenség iránya:

$$1 \leq 2(x+3)$$

$$1 \geq 2(x+3)$$

$$1 \leq 2x+6$$

$$1 \geq 2x+6$$

$$-5 \leq 2x$$

$$-5 \geq 2x$$

$$-2,5 \leq x,$$

$$-2,5 \geq x,$$

ekkor valóban teljesül, hogy $-3 < x$.

de most $-3 > x$, amikor is már a $-2,5 \geq x$ automatikusan teljesül.

Tehát a megoldás: $x \in (-\infty; -3) \cup [-2,5; +\infty)$.

Házi feladat

Oldjuk meg az $x + 5 = \sqrt{7 + x}$ egyenletet a valós számok halmazán.

Házi feladat

Oldjuk meg az $x + 5 = \sqrt{7 + x}$ egyenletet a valós számok halmazán.

A megoldás: $x = -3$, a -6 hamis gyök.