13. előadás

L'Hospital-szabály

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2023. október 25.

L'Hospital-szabály

Bernoulli–L'Hospital-szabály a $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ határérték kiszámítására (szokásos írásmód a L'Hôpital is)

Az $f(x)$ és $g(x)$ függvények differenciálhatóak az α egy nyílt környezetében (esetleg α-ban nem).
Ebben a környezetben $g'(x)\neq 0$ $(x\neq\alpha)$.
Továbbá

- $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=0$, vagy
- $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\pm\infty$ és $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=\pm\infty$.

Ekkor ha létezik a $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\beta$, akkor $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\beta$.

Az α,β valós szám vagy $\pm\infty$ lehet.

Az $x\to\alpha$ helyett mindenütt lehet venni jobb vagy bal oldali határértéket.

Példa

Mennyi a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$ határérték?

$f(x) = e^x - 1$ és $g(x) = x$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$.

Deriváltak: $f'(x) = e^x$ és $g'(x) = 1$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

Ezért

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Feladat

Mennyi a $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ határérték?

Feladat

Mennyi a $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ határérték?

$f(x) = \sin x$ és $g(x) = x$.

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$.

Deriváltak: $f'(x) = \cos x$ és $g'(x) = 1$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

Ezért

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Egy megjegyzés

Csak akkor működik a szabály, ha a $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték létezik.

Ha nem létezik, attól még a $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ létezhet:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x} = ?$$

$$\lim_{x\to\infty} (x+\sin x) = +\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x\to\infty} x = +\infty$$

$$f(x) = x + \sin x \qquad g(x) = x$$

$$f'(x) = 1 + \cos x \qquad g'(x) = 1$$

Tehát:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\cos x}{1} = \lim_{x\to\infty} 1+\cos x,$$

ami nem létezik. De

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty} 1 + \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Többszöri alkalmazás

Többször is alkalmazhatjuk a tételt:

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)} \rightsquigarrow \lim_{x\to\alpha}\frac{f'(x)}{g'(x)} \rightsquigarrow \lim_{x\to\alpha}\frac{f''(x)}{g''(x)} \rightsquigarrow \cdots = \beta$$

Példa:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - x - 1}{x^2} = ?$$

Többszöri alkalmazás

Többször is alkalmazhatjuk a tételt:

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)} \rightsquigarrow \lim_{x\to\alpha}\frac{f'(x)}{g'(x)} \rightsquigarrow \lim_{x\to\alpha}\frac{f''(x)}{g''(x)} \rightsquigarrow \cdots = \beta$$

Példa:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - x - 1}{x^2} = ?$$

$$\lim_{x\to 0} e^x - x - 1 = e^0 - 0 - 1 = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x - x - 1 & g(x) &= x^2 \\ f'(x) &= e^x - 1 & g'(x) &= 2x \\ f''(x) &= e^x & g''(x) &= 2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - x - 1}{x^2} \rightsquigarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{2x} \rightsquigarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2} = \frac{1}{2},$$

tehát

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Feladat

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = ?$$

Feladat

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = ?$$

Ez egy $\frac{0}{0}$ típusú határérték, tehát alkalmazhatjuk a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \rightsquigarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} \rightsquigarrow \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2},$$

tehát

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Ha nem törtről van szó

Ha nem tört határértékét szeretnénk megállapítani, akkor is megpróbálkozhatunk törtté alakítani.

$$\lim_{x\to\infty} xe^{-2x} = \lim_{x\to\infty} x\frac{1}{e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{2x}} \rightsquigarrow$$

Ha nem törtről van szó

Ha nem tört határértékét szeretnénk megállapítani, akkor is megpróbálkozhatunk törtté alakítani.

$$\lim_{x\to\infty} xe^{-2x} = \lim_{x\to\infty} x\frac{1}{e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{2x}} \rightsquigarrow \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{2x}\cdot 2} = 0$$

De van, amikor ennyire nem látszik:

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \rightsquigarrow$$

Ha nem törtről van szó

Ha nem tört határértékét szeretnénk megállapitani, akkor is megpróbálkozhatunk törtté alakítani.

$$\lim_{x\to\infty} xe^{-2x} = \lim_{x\to\infty} x\frac{1}{e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{2x}} \rightsquigarrow \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{2x}\cdot 2} = 0$$

De van, amikor ennyire nem látszik:

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \rightsquigarrow \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{x}{-1} = 0$$

Két tört különbsége a közös nevezőre való hozás után már egy tört:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} =$$

Ha nem törtről van szó

Ha nem tört határértékét szeretnénk megállapítani, akkor is megpróbálkozhatunk törtté alakítani.

$$\lim_{x\to\infty} xe^{-2x} = \lim_{x\to\infty} x\frac{1}{e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{2x}} \rightsquigarrow \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{2x}\cdot 2} = 0$$

De van, amikor ennyire nem látszik:

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \rightsquigarrow \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{x}{-1} = 0$$

Két tört különbsége a közös nevezőre való hozás után már egy tört:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)-\ln x}{(x-1)\ln x} \rightsquigarrow \lim_{x\to 1} \frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x + (x-1)\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x\ln x + x - 1} \rightsquigarrow \lim_{x\to 1} \frac{1}{\ln x + x\frac{1}{x} + 1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\ln x + 2} = \frac{1}{2}$$

Egy fontos különbség

A tört deriválása és a L'Hospital-szabály két különböző dolog!

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} \rightsquigarrow \lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Nem szabad összekeverni!

Egy régebbi példa

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{3-2x}-1}$$

Egy régebbi példa

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{3-2x}-1} \rightsquigarrow \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+3}}}{\frac{1}{2\sqrt{3-2x}}(-2)} = \lim_{x\to 1} \frac{-\sqrt{3-2x}}{2\sqrt{x+3}} = \frac{-\sqrt{1}}{2\sqrt{4}} = -\frac{1}{4}$$

Vajon mennyi a következő határérték?

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-1}{\sqrt{3-2x}-1} = ?$$

Egy régebbi példa

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{3-2x}-1} \rightsquigarrow \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+3}}}{\frac{1}{2\sqrt{3-2x}}(-2)} = \lim_{x\to 1} \frac{-\sqrt{3-2x}}{2\sqrt{x+3}} = \frac{-\sqrt{1}}{2\sqrt{4}} = -\frac{1}{4}$$

Vajon mennyi a következő határérték?

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-1}{\sqrt{3-2x}-1} = ?$$

Itt nem alkalmazhatjuk a L'Hospital-szabályt, mert nem $\frac{0}{0}$ alakú!

Egyébként nem létezik a határérték, mert $\frac{1}{0}$ alakú, és a nevező lehet negatív és pozitív is.