

18. előadás

Helyettesítéssel és parciális integrálás

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2023. november 22.

Bevezető feladatok

$$\int 2x \cos(x^2 + 3) dx =$$

Bevezető feladatok

$$\int 2x \cos(x^2 + 3) dx = \sin(x^2 + 3) + C$$

Bevezető feladatok

$$\int 2x \cos(x^2 + 3) dx = \sin(x^2 + 3) + C$$

$$\int (\sin x)^3 \cos x dx =$$

Bevezető feladatok

$$\int 2x \cos(x^2 + 3) dx = \sin(x^2 + 3) + C$$

$$\int (\sin x)^3 \cos x dx = \frac{(\sin x)^4}{4} + C$$

Bevezető feladatok

$$\int 2x \cos(x^2 + 3) dx = \sin(x^2 + 3) + C$$

$$\int (\sin x)^3 \cos x dx = \frac{(\sin x)^4}{4} + C$$

$$\int \operatorname{tg} x dx =$$

Bevezető feladatok

$$\int 2x \cos(x^2 + 3) dx = \sin(x^2 + 3) + C$$

$$\int (\sin x)^3 \cos x dx = \frac{(\sin x)^4}{4} + C$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int -(\cos x)^{-1}(-\sin x) dx = -\ln |\cos x| + C$$

Bevezető feladatok

$$\int 2x \cos(x^2 + 3) dx = \sin(x^2 + 3) + C$$

$$\int (\sin x)^3 \cos x dx = \frac{(\sin x)^4}{4} + C$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int -(\cos x)^{-1}(-\sin x) dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$\int \operatorname{ctg} x dx =$$

Bevezető feladatok

$$\int 2x \cos(x^2 + 3) dx = \sin(x^2 + 3) + C$$

$$\int (\sin x)^3 \cos x dx = \frac{(\sin x)^4}{4} + C$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int -(\cos x)^{-1}(-\sin x) dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln |\sin x| + C$$

Első helyettesítési szabály

Összetett függvény deriválási szabálya:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Ebből egy integrálási szabály:

$$\int f'(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = f(g(x)) + C$$

Vagy $f(x)$ és $F(x)$ jelölésekkel (F az f primitív függvénye, azaz $F' = f$):

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = F(g(x)) + C$$

Speciális eset, amikor $g(x) = ax + b$ alakú: lineáris helyettesítés:

$$\int f(ax + b) \cdot a \, dx = F(ax + b) + C$$

Példa:

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx =$$

Első helyettesítési szabály

Összetett függvény deriválási szabálya:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Ebből egy integrálási szabály:

$$\int f'(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = f(g(x)) + C$$

Vagy $f(x)$ és $F(x)$ jelölésekkel (F az f primitív függvénye, azaz $F' = f$):

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = F(g(x)) + C$$

Speciális eset, amikor $g(x) = ax + b$ alakú: lineáris helyettesítés:

$$\int f(ax + b) \cdot a \, dx = F(ax + b) + C$$

Példa:

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx = \int 2 \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx = 2e^{\sqrt{x}} + C$$

$$g(x) = \sqrt{x}, \quad g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f(x) = e^x, \quad F(x) = e^x$$

Parciális integrálás

Leibniz-szabály:

$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = (fg)'(x)$$

Ebből:

$$\int f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \, dx = f(x)g(x) + C$$

Átrendezve:

$$\int f(x)g'(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \, dx$$

Ezt nevezzük **parciális integrálásnak**.

Példa:

$$\int x \cos x \, dx =$$

$$f(x) = x \quad f'(x) =$$

$$g'(x) = \cos x \quad g(x) =$$

Parciális integrálás

Leibniz-szabály:

$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = (fg)'(x)$$

Ebből:

$$\int f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \, dx = f(x)g(x) + C$$

Átrendezve:

$$\int f(x)g'(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \, dx$$

Ezt nevezzük **parciális integrálásnak**.

Példa:

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x - (-\cos x) + C = x \sin x + \cos x + C$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x & f'(x) &= 1 \\ g'(x) &= \cos x & g(x) &= \sin x \end{aligned}$$

Többszörös alkalmazás

$$\int x^2 e^{3x} dx =$$

Többszörös alkalmazás

$$\int x^2 e^{3x} dx = x^2 \frac{e^{3x}}{3} - \int 2x \frac{e^{3x}}{3} dx = \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx$$

$$f(x) = x^2 \quad f'(x) = 2x$$

$$g'(x) = e^{3x} \quad g(x) = \frac{e^{3x}}{3}$$

Egy újabb parciális integrálás:

$$\int x e^{3x} dx =$$

Többszörös alkalmazás

$$\int x^2 e^{3x} dx = x^2 \frac{e^{3x}}{3} - \int 2x \frac{e^{3x}}{3} dx = \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx$$

$$f(x) = x^2 \quad f'(x) = 2x$$

$$g'(x) = e^{3x} \quad g(x) = \frac{e^{3x}}{3}$$

Egy újabb parciális integrálás:

$$\int x e^{3x} dx = x \frac{e^{3x}}{3} - \int 1 \frac{e^{3x}}{3} dx = \frac{x e^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + C$$

$$f(x) = x \quad f'(x) = 1$$

$$g'(x) = e^{3x} \quad g(x) = \frac{e^{3x}}{3}$$

Ezzel:

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{3x} dx &= \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx = \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{3} \left(\frac{x e^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + C \right) = \\ &= \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2x e^{3x}}{9} + \frac{2e^{3x}}{27} + C \end{aligned}$$

Egy érdekesség

$$\int e^x \sin(2x) dx = \sin(2x)e^x - \int 2 \cos(2x)e^x dx = e^x \sin(2x) - 2 \int e^x \cos(2x) dx$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(2x) & f'(x) &= 2 \cos(2x) \\ g'(x) &= e^x & g(x) &= e^x \end{aligned}$$

$$\int e^x \cos(2x) dx = \cos(2x)e^x - \int -2 \sin(2x)e^x dx = e^x \cos(2x) + 2 \int e^x \sin(2x) dx$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(2x) & f'(x) &= -2 \sin(2x) \\ g'(x) &= e^x & g(x) &= e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int e^x \sin(2x) dx &= e^x \sin(2x) - 2 \left(e^x \cos(2x) + 2 \int e^x \sin(2x) dx \right) = \\ &= e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x) - 4 \int e^x \sin(2x) dx \end{aligned}$$

$$5 \int e^x \sin(2x) dx = e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x) + C$$

$$\int e^x \sin(2x) dx = \frac{1}{5} e^x \sin(2x) - \frac{2}{5} e^x \cos(2x) + C$$

Parciális integrálás és az inverz függvények

$$\int \ln x \, dx =$$

Parciális integrálás és az inverz függvények

$$\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx = (\ln x)x - \int \frac{1}{x} x \, dx = x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + C$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x & f'(x) &= \frac{1}{x} \\ g'(x) &= 1 & g(x) &= x \end{aligned}$$

Parciális integrálás és az inverz függvények

$$\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx = (\ln x)x - \int \frac{1}{x} x \, dx = x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + C$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x & f'(x) &= \frac{1}{x} \\ g'(x) &= 1 & g(x) &= x \end{aligned}$$

$$\int x \operatorname{arctg} x \, dx =$$

Parciális integrálás és az inverz függvények

$$\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx = (\ln x)x - \int \frac{1}{x} x \, dx = x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + C$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x & f'(x) &= \frac{1}{x} \\ g'(x) &= 1 & g(x) &= x \end{aligned}$$

$$\int x \operatorname{arctg} x \, dx = \operatorname{arctg} x \frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{x^2+1} \frac{x^2}{2} \, dx = \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x^2+1} \, dx$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{arctg} x & f'(x) &= \frac{1}{x^2+1} \\ g'(x) &= x & g(x) &= \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

$$\int \frac{x^2}{x^2+1} \, dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} \, dx = \int 1 - \frac{1}{x^2+1} \, dx = x - \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int x \operatorname{arctg} x \, dx = \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x^2+1} \, dx = \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{2} - \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{arctg} x}{2} + C$$

Egy kérdés

$$\int \frac{1}{x} \frac{1}{\ln x} dx = \frac{1}{\ln x} \ln x - \int -\frac{1}{(\ln x)^2} \frac{1}{x} \ln x dx = 1 + \int \frac{1}{x} \frac{1}{\ln x} dx$$

$$f(x) = \frac{1}{\ln x} \quad f'(x) = -\frac{1}{(\ln x)^2} \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = \frac{1}{x} \quad g(x) = \ln x$$

Tehát

$$0 = 1$$

Egy kérdés

$$\int \frac{1}{x} \frac{1}{\ln x} dx = \frac{1}{\ln x} \ln x - \int -\frac{1}{(\ln x)^2} \frac{1}{x} \ln x dx = 1 + \int \frac{1}{x} \frac{1}{\ln x} dx$$

$$f(x) = \frac{1}{\ln x} \quad f'(x) = -\frac{1}{(\ln x)^2} \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = \frac{1}{x} \quad g(x) = \ln x$$

Tehát

$$0 = 1$$

A hiba az integrációs konstans (+C) elhanyagolása.

Egyébként:

$$\int \frac{1}{x} \frac{1}{\ln x} dx = \ln |\ln x| + C$$

Amikor nem jelenik meg a belső függvény deriváltja

$$\int \sin(\sqrt{x}) dx = \int \sin(u)2u du = 2 \int u \sin(u) du$$

Az új változó: $u = \sqrt{x}$

A régi változót kifejezzük az újjal: $u^2 = x$

Lederiváljuk: $\frac{dx}{du} = 2u$

Átrendezve: $dx = 2u du$

Parciális integrálással folytatjuk:

$$\int u \sin(u) du = u(-\cos u) - \int -\cos u du = -u \cos u + \sin u + C$$

$$f(u) = u \quad f'(u) = 1$$

$$g'(u) = \sin u \quad g(u) = -\cos u$$

A végeredménybe még az eredeti változót is vissza kell írni:

$$\begin{aligned} \int \sin(\sqrt{x}) dx &= 2 \int u \sin(u) du = -2u \cos u + 2 \sin u + C = \\ &= -2\sqrt{x} \cos(\sqrt{x}) + 2 \sin(\sqrt{x}) + C \end{aligned}$$

Második helyettesítési szabály

$$\int f(x) \, dx = \int f(g(u))g'(u) \, du,$$

ahol $x = g(u)$ monoton függvény.

Példa:

$$\int \frac{e^{2x}}{1 + e^x} \, dx =$$

Második helyettesítési szabály

$$\int f(x) dx = \int f(g(u))g'(u) du,$$

ahol $x = g(u)$ monoton függvény.

Példa:

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx = \int \frac{u^2}{1+u} \frac{1}{u} du = \int \frac{u}{1+u} du =$$

$u = e^x \rightsquigarrow x = \ln u$, így $g(u) = \ln u$, melynek deriváltja: $g'(u) = \frac{1}{u}$
(Vagy: $\frac{dx}{du} = \frac{1}{u} \rightsquigarrow dx = \frac{1}{u} du$)

Ez egy polinomosztás:

$$= \int \frac{1+u-1}{1+u} du = \int 1 - \frac{1}{1+u} du = u - \ln(1+u) + C =$$

Végül visszaírjuk az eredeti változót:

$$= e^x - \ln(1+e^x) + C$$

Néhány ismert példa

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

Néhány ismert példa

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\cos u} \cos u du = \int 1 du = u + C = \arcsin x + C$$

$$x = \sin u \rightsquigarrow u = \arcsin(x)$$

$$\frac{dx}{du} = \cos u \rightsquigarrow dx = \cos u du$$

Néhány ismert példa

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\cos u} \cos u du = \int 1 du = u + C = \arcsin x + C$$

$$x = \sin u \rightsquigarrow u = \arcsin(x)$$

$$\frac{dx}{du} = \cos u \rightsquigarrow dx = \cos u du$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx =$$

Néhány ismert példa

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\cos u} \cos u du = \int 1 du = u + C = \arcsin x + C$$

$$x = \sin u \rightsquigarrow u = \arcsin(x)$$

$$\frac{dx}{du} = \cos u \rightsquigarrow dx = \cos u du$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{1}{\operatorname{ch} u} \operatorname{ch} u du = \int 1 du = u + C = \operatorname{arsh} x + C$$

$$x = \operatorname{sh} u, \text{ és így } \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u} = \operatorname{ch} u$$

$$\frac{dx}{du} = \operatorname{ch} u \rightsquigarrow dx = \operatorname{ch} u du$$

Néhány ismert példa

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\cos u} \cos u du = \int 1 du = u + C = \arcsin x + C$$

$$x = \sin u \rightsquigarrow u = \arcsin(x)$$

$$\frac{dx}{du} = \cos u \rightsquigarrow dx = \cos u du$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{1}{\operatorname{ch} u} \operatorname{ch} u du = \int 1 du = u + C = \operatorname{arsh} x + C$$

$$x = \operatorname{sh} u, \text{ és így } \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u} = \operatorname{ch} u$$

$$\frac{dx}{du} = \operatorname{ch} u \rightsquigarrow dx = \operatorname{ch} u du$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx =$$

Néhány ismert példa

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\cos u} \cos u du = \int 1 du = u + C = \arcsin x + C$$

$$x = \sin u \rightsquigarrow u = \arcsin(x)$$

$$\frac{dx}{du} = \cos u \rightsquigarrow dx = \cos u du$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{1}{\operatorname{ch} u} \operatorname{ch} u du = \int 1 du = u + C = \operatorname{arsh} x + C$$

$$x = \operatorname{sh} u, \text{ és így } \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u} = \operatorname{ch} u$$

$$\frac{dx}{du} = \operatorname{ch} u \rightsquigarrow dx = \operatorname{ch} u du$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \int \frac{1}{\operatorname{sh} u} \operatorname{sh} u du = \int 1 du = u + C = \operatorname{arch} x + C$$

$$x = \operatorname{ch} u, \text{ és így } \sqrt{x^2-1} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 u - 1} = \operatorname{sh} u$$

$$\frac{dx}{du} = \operatorname{sh} u \rightsquigarrow dx = \operatorname{sh} u du$$