19. előadás

Határozott integrál

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2023. november 28.

Riemann-integrál

Adott egy $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény.
A grafikonja alatti területet szeretnénk kiszámolni.

Ehhez felosztjuk az $[a,b]$ intervallumot:

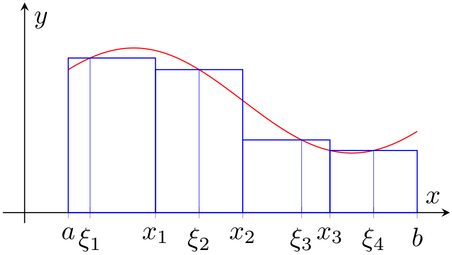
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

és választunk közbülső pontokat:

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

A terület közelítő összege:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$



Ezek határértéke (amint egyre finomabb felosztást választunk):

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

ha létezik, ekkor f integrálható $[a,b]$-n.

Newton–Leibniz-tétel

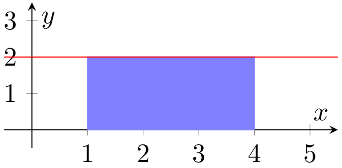
Ha f integrálható az $[a, b]$ intervallumon és f-nek létezik az (a, b) intervallumon F primitív függvénye, mely folytonos az $[a, b]$ intervallumon, akkor

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

A jobb oldalra bevett jelölés: $[F(x)]_a^b$

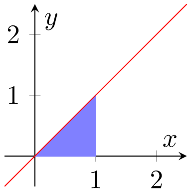
Példák:
$f(x) = 2$ és $[a, b] = [1, 4]$.
Ekkor $F(x) = 2x$, és így:

$$\int_1^4 2\ \mathrm{d}x = [2x]_1^4 = 8 - 2 = 6$$



$f(x) = x$ és $[a, b] = [0, 1]$

$$\int_0^1 x\ \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

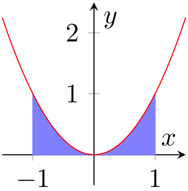


További példák/feladatok

$$\int_{-1}^{1} x^2 \, \mathrm{d}x$$

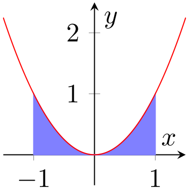
További példák/feladatok

$$\int_{-1}^{1} x^2 \ \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \frac{-1}{3} = \frac{2}{3}$$



További példák/feladatok

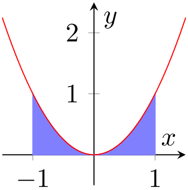
$$\int_{-1}^{1} x^2 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \frac{-1}{3} = \frac{2}{3}$$



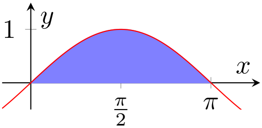
$$\int_0^{\pi} \sin x \, \mathrm{d}x$$

További példák/feladatok

$$\int_{-1}^{1} x^2 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \frac{-1}{3} = \frac{2}{3}$$

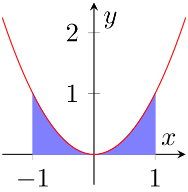


$$\int_0^{\pi} \sin x \, \mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{\pi} = -(-1)-(-1) = 2$$

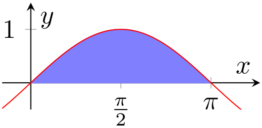


További példák/feladatok

$$\int_{-1}^{1} x^2 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \frac{-1}{3} = \frac{2}{3}$$



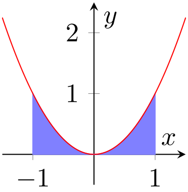
$$\int_{0}^{\pi} \sin x \, \mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{\pi} = -(-1) - (-1) = 2$$



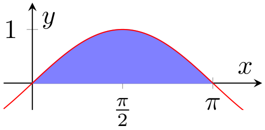
$$\int_{0}^{\pi} \cos x \, \mathrm{d}x$$

További példák/feladatok

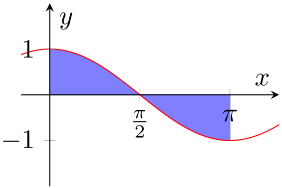
$$\int_{-1}^{1} x^2 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \frac{-1}{3} = \frac{2}{3}$$



$$\int_{0}^{\pi} \sin x \, \mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{\pi} = -(-1) - (-1) = 2$$

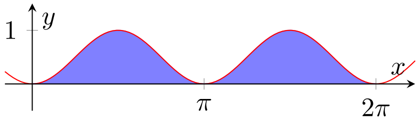


$$\int_{0}^{\pi} \cos x \, \mathrm{d}x = [\sin x]_0^{\pi} = 0 - 0 = 0$$



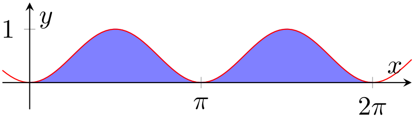
És még egy

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x \; \mathrm{d}x = ?$$



És még egy

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x \; \mathrm{d}x = ?$$



A $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$ azonosság felhasználásával:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x \; \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2x)}{2} \; \mathrm{d}x = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{2} - 0 = \pi$$

Egy másik megoldás:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x \; \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \cos^2 x \; \mathrm{d}x$$

és

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x \; \mathrm{d}x + \int_0^{2\pi} \cos^2 x \; \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \sin^2 x + \cos^2 x \; \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} 1 \; \mathrm{d}x = [x]_0^{2\pi} = 2\pi,$$

így

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x \; \mathrm{d}x = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

Integrálfüggvény

Tétel:
Ha az $f(x)$ függvény folytonos az $[a, b]$ intervallumon, akkor létezik primitív függvénye, éspedig az

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

integrálfüggvény.

Példa:
$f(x) = \sin x$ és $a = 0$ esetén az integrálfüggvény:

$$F(x) = \int_0^x \sin t\ \mathrm{d}t = [-\cos t]_0^x = -\cos x - (-\cos 0) = -\cos x + 1$$

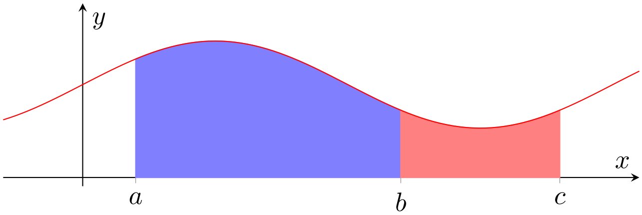
Az integrálfüggvényt nem mindig tudjuk az általunk ismert függvényekkel felírni, például az $f(x) = e^{-x^2}$ esetén.

De azt tudjuk, hogy $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Additivitás

Tétel:
Ha $a < b < c$ és az $f(x)$ függvény integrálható az $[a, c]$ intervallumon, akkor

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x.$$



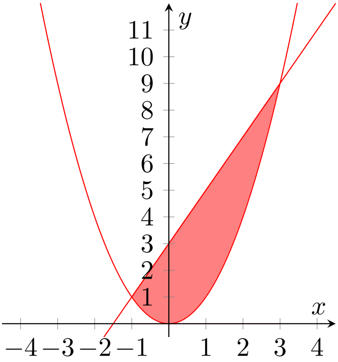
Egy feladat

Határozzuk meg az $y = x^2$ parabola és az $y = 2x + 3$ egyenes által határolt (korlátos) síkidom területét!

Egy feladat

Határozzuk meg az $y = x^2$ parabola és az $y = 2x + 3$ egyenes által határolt (korlátos) síkidom területét!

Először számoljuk ki a metszéspontokat!



$$x^2 = 2x + 3$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix}$$

Így tehát a következő integrál kell:

$$\int_{-1}^{3} 2x + 3 - x^2 \, \mathrm{d}x = \left[x^2 + 3x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{3} = (9 + 9 - 9) - \left(1 - 3 - \frac{-1}{3}\right) = \frac{32}{3}$$