

## 2. előadás

### Függvényábrázolás és bizonyítási módszerek

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,  
Algebra és Geometria Tanszék

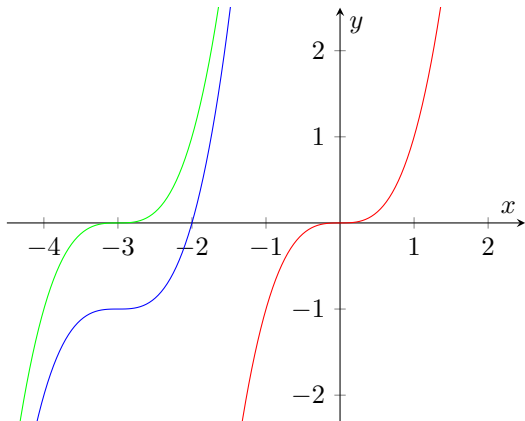
2023. szeptember 6.

# Függvényábrázolás

Ábrázoljuk az  $f(x) = (x + 3)^3 - 1$  függvény grafikonját.

A  $h(x) = (x + 3)^3$  függvény grafikonját a  $g(x) = x^3$  függvény grafikonjának 3 egységgel való balra tolásával kapjuk.

Általánosan: ha az  $x$ -hez hozzáadunk (levonunk)  $x_1$ -et, akkor a grafikont  $x_1$ -gyel balra (jobbra) toljuk. Végül az  $f(x) = (x + 3)^3 - 1$  függvény grafikonját a  $h$  függvény grafikonjának 1-gyel való lefelé tolásával kapjuk.



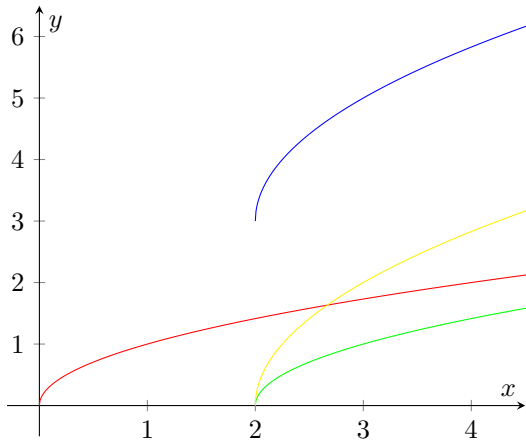
## Függvényábrázolás

Ábrázoljuk az  $f(x) = 2\sqrt{x-2} + 3$  függvény grafikonját.

# Függvényábrázolás

Ábrázoljuk az  $f(x) = 2\sqrt{x-2} + 3$  függvény grafikonját.

Hasonlóan az előzőhöz: A  $\sqrt{x}$  grafikonját 2 egységgel jobbra tolva kapjuk a  $\sqrt{x-2}$  függvény grafikonját. Ennek a  $2\sqrt{x-2}$  a kétszerese, tehát ezt meg kell egy kicsit nyújtanunk, és végül 3-mal való feltolással kapjuk a  $2\sqrt{x-2} + 3$  grafikonját.



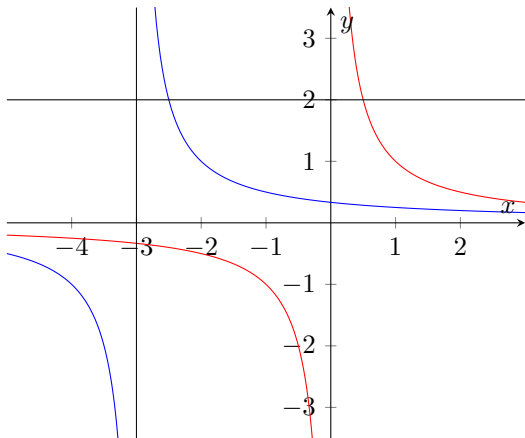
## Egy tegnapi feladat

Oldjuk meg *grafikusan* az  $\frac{1}{x+3} \leq 2$  egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

## Egy tegnapi feladat

Oldjuk meg *grafikusan* az  $\frac{1}{x+3} \leq 2$  egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

Az  $\frac{1}{x+3}$  grafikonját az ismert  $\frac{1}{x}$  grafikonból eltolással kaphatjuk:



Így le tudjuk olvasni a megoldást:  $(-\infty; -3) \cup [-2, 5; +\infty)$ .

## Még egy egyenlőtlenség

Oldjuk meg az  $x^2 + 2x > 3$  egyenlőtlenséget.

## Még egy egyenlőtlenség

Oldjuk meg az  $x^2 + 2x > 3$  egyenlőtlenséget.

Teljes négyzetté alakítással:

$$x^2 + 2x > 3$$

$$(x + 1)^2 - 1 > 3$$

$$(x + 1)^2 > 4$$

$$|x + 1| > 2$$

$$x + 1 < -2 \quad \text{vagy} \quad x + 1 > 2$$

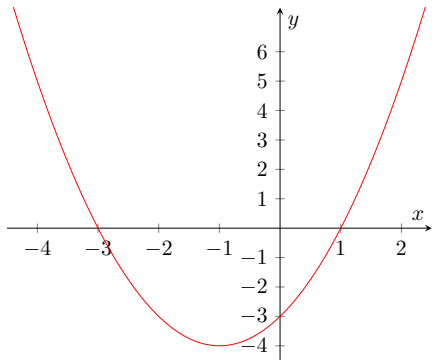
$$x < -3 \quad \text{vagy} \quad x > 1$$

azaz  $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ .

Másik lehetőség: az  $x^2 + 2x - 3$  függvény grafikonja egy parabola (mivel másodfokú), mely felfelé nyílik (mivel pozitív a főegyüttható).

A nullhelyektől balra, illetve jobbra vannak a megfelelő értékek:

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-3)}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{matrix} 1 \\ -3 \end{matrix}$$





## Egyenesek egyenlete

Írjuk fel a  $P(1, 2)$  és a  $Q(3, 4)$  ponton átmenő egyenes egyenletét.

# Egyenesek egyenlete

Írjuk fel a  $P(1, 2)$  és a  $Q(3, 4)$  ponton átmenő egyenes egyenletét.

Az egyenes *meredeksége*: 2 egységet emelkedünk, míg 2 egységet megyünk jobbra, e kettő hányadosa a meredekség: 1.

Általában a  $P_1(x_1, y_1)$  és  $P_2(x_2, y_2)$  által meghatározott egyenes meredeksége  $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ .

Tehát az egyenes *egyenlete*  $y = 1 \cdot x + b$ , ahol a  $b$  számot úgy kell meghatározni, hogy a pontjaink kielégítsék ezt az egyenletet.  $b = 1$ .

Általában  $y - y_1 = m(x - x_1)$ , ahol  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ .

## Egyenesek egyenlete

Írjuk fel a  $P(5, 1)$  és a  $Q(2, 3)$  ponton átmenő egyenes egyenletét.

## Egyenesek egyenlete

Írjuk fel a  $P(5, 1)$  és a  $Q(2, 3)$  ponton átmenő egyenes egyenletét.

$$x_1 = 5, y_1 = 1, x_2 = 2, y_2 = 3.$$

$$\text{A meredekség: } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 1}{2 - 5} = -\frac{2}{3}.$$

Az egyenes egyenlete:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = -\frac{2}{3}(x - 5)$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}.$$

# Egyenesek egyenlete

Írjuk fel a  $P(5, 1)$  és a  $Q(2, 3)$  ponton átmenő egyenes egyenletét.

$$x_1 = 5, y_1 = 1, x_2 = 2, y_2 = 3.$$

$$\text{A meredekség: } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 1}{2 - 5} = -\frac{2}{3}.$$

Az egyenes egyenlete:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = -\frac{2}{3}(x - 5)$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}.$$

Hogyan jellemezhetőek az egyenes alatti és feletti pontok?

$$\text{Egyenes alatti pontok: } y < -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}.$$

$$\text{Egyenes feletti pontok: } y > -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}.$$

# Teljes indukció

$$1 + 2 + \dots + n = ?$$

Készítsünk táblázatot!

$n$	1	2	3	4	5	6
összeg	1	3	6	10	15	21

Megsejthetjük, hogy

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ -ra mindenesetre igaz.

Ha igaz  $n$ -re, akkor  $(n+1)$ -re vajon igaz?

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + (n+1) &= 1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \\ &= \left(\frac{n}{2} + 1\right)(n+1) = \frac{(n+2)(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2} \end{aligned}$$

Tehát akkor igaz  $(n+1)$ -re is. 1-től  $n$ -ig végiglépegetve, tetszőleges  $n$ -re igaz.

## Feladat

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = ?$$

# Feladat

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = ?$$

Megint megnézzük kis  $n$ -ekre:

$n$	1	2	3	4
összeg	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$

Sejtés: az összeg  $\frac{n}{n+1}$ .

A sejtés  $n = 1$  esetén helyes.

Ha tudjuk  $n$ -re, akkor  $(n+1)$ -re:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+1}{n+1+1} \end{aligned}$$

Ezzel beláttuk a sejtésünket.



# Indirekt bizonyítás

Mutassuk meg, hogy a  $\sqrt{2}$  szám irracionális.

Feltesszük, hogy nem, azaz, hogy racionális, két egész szám hányadosa:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{Z}$$

Négyzetre emelve, és átszorozva:

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$
$$2q^2 = p^2$$

A számelmélet alaptétele szerint mindkét oldal egyértelműen prímtényezőkre szorozható. Így mindkét oldalon a 2 kitevője azonos.

Másrészt négyzetszámokban minden prímtényező kitevője páros.

Ez ellentmondás, így indirekt feltevésünk volt hamis.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a  $\sqrt{2}$  irracionális.

# Házi feladat

Oldjuk meg az  $-x^2 + 3x > 2$  egyenlőtlenséget.

# Házi feladat

Oldjuk meg az  $-x^2 + 3x > 2$  egyenlőtlenséget.

Megoldás:  $x \in (1, 2)$ .