

20. előadás

Határozott integrál alkalmazásai

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2023. november 29.

Függvénygrafikon ívhossza

Adott egy $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény, a grafikonjának az ívhosszát szeretnénk meghatározni.

Ha felosztjuk az intervallumot:

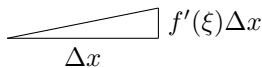
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

akkor az ezekhez tartozó töröttvonal hosszával közelíthetjük az ívhosszat.

Az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumhoz tartozó szakasz meredekségét egy belső $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ pontbeli derivált megadja (Lagrange-tétel).

Ha az intervallum hossza Δx , akkor a függvény emelkedése $f'(\xi)\Delta x$, és ekkor az átfogó hossza:

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (f'(\xi)\Delta x)^2} = \sqrt{1 + (f'(\xi))^2} \Delta x$$

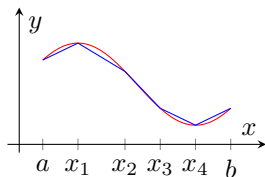


Ezek összege

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} (x_i - x_{i-1}),$$

melynek határértéke

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$



Félkör ívhossza

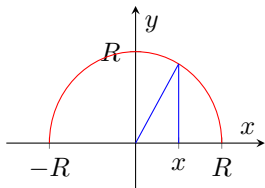
Az $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény grafikonjának ívhossza

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx.$$

Példa: félkör ívhossza/kerülete

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{R^2 - x^2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$



Így az ívhossz:

$$\begin{aligned} L &= \int_{-R}^R \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2} \, dx = \int_{-R}^R \sqrt{\frac{R^2 - x^2}{R^2 - x^2} + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} \, dx = \\ &= \int_{-R}^R \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}} \, dx = \int_{-R}^R \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}}} \, dx = \int_{-R}^R \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}} \, dx = \\ &= \left[R \arcsin\left(\frac{x}{R}\right) \right]_{-R}^R = R \arcsin 1 - R \arcsin(-1) = R \frac{\pi}{2} - R \left(-\frac{\pi}{2}\right) = R\pi \end{aligned}$$

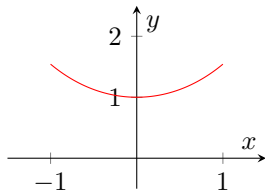
Láncgörbe ívhossza

Legyen

$$f(x) = \operatorname{ch} x \quad x \in [-1, 1]$$

láncgörbe.

Határozzuk meg az ívhosszát!



Láncgörbe ívhossza

Legyen

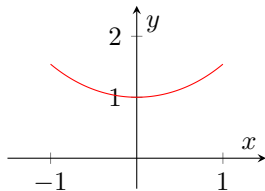
$$f(x) = \operatorname{ch} x \quad x \in [-1, 1]$$

láncgörbe.

Határozzuk meg az ívhosszát!

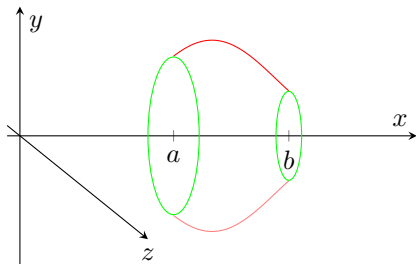
$f'(x) = \operatorname{sh} x$, és így az ívhossz:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x} \, dx &= \int_{-1}^1 \operatorname{ch} x \, dx = [\operatorname{sh} x]_{-1}^1 = \operatorname{sh}(1) - \operatorname{sh}(-1) = 2\operatorname{sh}(1) = \\ &= 2 \frac{e - e^{-1}}{2} = e - \frac{1}{e} \end{aligned}$$



Forgástestek

Adott egy $f(x)$ függvény, mely csak nemnegatív értékeket vesz fel. Ennek grafikonját az x tengely körül megforgatjuk (térben). Így egy forgásfelületet kapunk.



Példák:

$f(x) = c$ ekkor egy hengert kapunk

$f(x) = ax$ ekkor egy kúpot vagy csonkakúpot kapunk

$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ egy gömb

Forgástestek térfogata

Itt is felosztjuk az intervallumot, és egy Δx hosszú intervallumhoz tartozó forgástest darabka térfogatát egy közbülső, $f(\xi)$ sugarú, Δx magasságú henger térfogatával, azaz $f^2(\xi)\pi\Delta x$ -szel közelítjük. Ezek összege:

$$\sum_{i=1}^n f^2(\xi_i)\pi(x_i - x_{i-1}) \rightarrow \int_a^b f^2(x)\pi \, dx$$

Az $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény grafikonjának x tengely körül való forgatásával kapott forgástest térfogata:

$$\pi \int_a^b f^2(x) \, dx$$

Példa:

$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ félkörív körbeforgatásával kapott gömb térfogata:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2}^2 \, dx = \pi \int_{-R}^R R^2 - x^2 \, dx = \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-R}^R = \\ &= \pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} - \left(-R^3 - \frac{(-R)^3}{3} \right) \right) = \frac{4\pi}{3} R^3 \end{aligned}$$

Forgástestek felszíne

Csak a palást felszínét számoljuk, az alapkörök területét nem.

Egy Δx hosszú intervallumhoz tartozó forgástest darabka felszínét egy közbülső, kb. $f(\xi)$ sugarú, Δx magasságú csonkakúp palástfelszínével, azaz

$2\pi f(\xi)\sqrt{1+(f'(\xi))^2}\Delta x$ -szel közelítjük. Ezek összege:

$$\sum_{i=1}^n 2\pi f(\xi_i)\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}(x_i - x_{i-1}) \rightarrow \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2} dx$$

Az $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény grafikonjának x tengely körül való forgatásával kapott forgástest felszíne:

$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2} dx$$

Példa:

$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ félkörív körbeforgatásával kapott gömb felszíne:

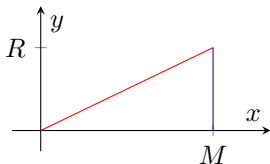
$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx = 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2 + x^2} dx = \\ &= 2\pi \int_{-R}^R R dx = 2\pi[Rx]_{-R}^R = 2\pi(R^2 - (-R^2)) = 4\pi R^2 \end{aligned}$$

Kúp térfogata és felszíne

Az R sugarú körlap alapú,
 M magasságú kúpot az alábbi
függvény megforgatásával kapjuk meg:

$$f(x) = \frac{R}{M}x \quad x \in [0, M]$$

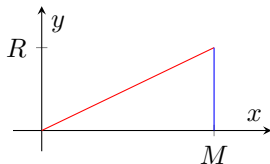
Ennek térfogata:



Kúp térfogata és felszíne

Az R sugarú körlap alapú,
 M magasságú kúpot az alábbi
függvény megforgatásával kapjuk meg:

$$f(x) = \frac{R}{M}x \quad x \in [0, M]$$



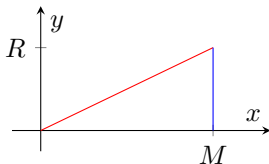
Ennek térfogata:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^M \left(\frac{R}{M}x \right)^2 dx = \pi \frac{R^2}{M^2} \int_0^M x^2 dx = \pi \frac{R^2}{M^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^M = \\ &= \pi \frac{R^2}{M^2} \frac{M^3}{3} = \frac{R^2 M \pi}{3} \end{aligned}$$

Kúp térfogata és felszíne

Az R sugarú körlap alapú,
 M magasságú kúpot az alábbi
függvény megforgatásával kapjuk meg:

$$f(x) = \frac{R}{M}x \quad x \in [0, M]$$



Ennek térfogata:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^M \left(\frac{R}{M}x \right)^2 dx = \pi \frac{R^2}{M^2} \int_0^M x^2 dx = \pi \frac{R^2}{M^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^M = \\ &= \pi \frac{R^2}{M^2} \frac{M^3}{3} = \frac{R^2 M \pi}{3} \end{aligned}$$

A függvény deriváltja: $f'(x) = \frac{R}{M}$, és ezzel a felszíne:

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^M \frac{R}{M}x \sqrt{1 + \left(\frac{R}{M} \right)^2} dx = 2\pi \frac{R}{M} \sqrt{\frac{M^2 + R^2}{M^2}} \int_0^M x dx = \\ &= 2\pi \frac{R}{M} \frac{\sqrt{M^2 + R^2}}{M} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^M = 2\pi \frac{R\sqrt{M^2 + R^2}}{M^2} \frac{M^2}{2} = \pi R \sqrt{M^2 + R^2} \end{aligned}$$