

# 4. előadás

## Függvények

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,  
Algebra és Geometria Tanszék

2023. szeptember 19.

# Monotonitás

Az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vagy  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$  ( $D_f \subseteq \mathbb{R}$ ) függvény

- ▶ **monoton nő**, ha  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ .
- ▶ **szigorúan monoton nő**, ha  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ .
- ▶ **monoton csökken**, ha  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ .
- ▶ **szigorúan monoton csökken**, ha  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ .
- ▶ **monoton**, ha  $f(x)$  monoton nő vagy monoton csökken.
- ▶ **szigorúan monoton**, ha  $f(x)$  szigorúan monoton nő vagy szigorúan monoton csökken.

Példák:

$f(x) = x$  szigorúan monoton nő.

$g(x) = x^2$  szigorúan monoton csökken  $(-\infty, 0]$ -n és szigorúan monoton nő  $[0, +\infty)$ -n, de  $\mathbb{R}$ -en nem monoton.

$h(x) = [x]$  monoton nő, de nem szigorúan monoton nő.

$i(x) = 2$  monoton nő és monoton csökken.

Ha egy függvény monoton nő és monoton csökken, akkor konstans függvény.

# Korlátosság

Az  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$  ( $D_f \subseteq \mathbb{R}$ ) függvény

- ▶ **alulról korlátos**, ha van olyan  $k \in \mathbb{R}$ , hogy  $f(x) \geq k$  minden  $x \in D_f$  esetén ( $k$  alsó korlát).  $\rightsquigarrow$  legnagyobb alsó korlát
- ▶ **felülről korlátos**, ha van olyan  $K \in \mathbb{R}$ , hogy  $f(x) \leq K$  minden  $x \in D_f$  esetén ( $K$  felső korlát).  $\rightsquigarrow$  legkisebb felső korlát
- ▶ **korlátos**, ha alulról és felülről korlátos, azaz van olyan  $K \in \mathbb{R}$ , hogy  $|f(x)| \leq K$  minden  $x \in D_f$  esetén.

Példák:

$f(x) = |x|$  alulról korlátos, legnagyobb alsó korlát a 0, de felülről nem korlátos, így nem is korlátos.

$g(x) = \sin x$  alulról korlátos, legnagyobb alsó korlát  $-1$ , felülről korlátos, legkisebb felső korlát a 1, így korlátos is.

# Periodicitás

Az  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$  ( $D_f \subseteq \mathbb{R}$ ) függvény **periodikus**, ha létezik  $d \neq 0$  úgy, hogy  $x \in D_f$  esetén  $x \pm d \in D_f$  és  $f(x + d) = f(x)$  ( $d$  szerint periodikus).

Ha egy függvény  $d$  szerint periodikus, akkor  $kd$  szerint is periodikus ( $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ).

A legkisebb pozitív periódus a **főperiódus** (ha van).

Egy példa, amikor nincs: Dirichlet-függvény:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \\ 1, & \text{ha } x \text{ racionális} \end{cases}$$

Példák:

$\sin x$ ,  $\cos x$   $2\pi$  szerint periodikus

$\operatorname{tg} x$   $\pi$  szerint periodikus

$\{x\}$  törtrész függvény 1 szerint periodikus

# Paritás

Az  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$  ( $D_f \subseteq \mathbb{R}$ ) függvény

- ▶ **páros**, ha  $x \in D_f$  esetén  $-x \in D_f$ , és  $f(-x) = f(x)$ .  
A grafikon az  $y$  tengelyre tükrös.
- ▶ **páratlan**, ha  $x \in D_f$  esetén  $-x \in D_f$ , és  $f(-x) = -f(x)$ .  
A grafikon az origóra tükrös.

Példák:

$x^2, |x|, \cos x$  páros

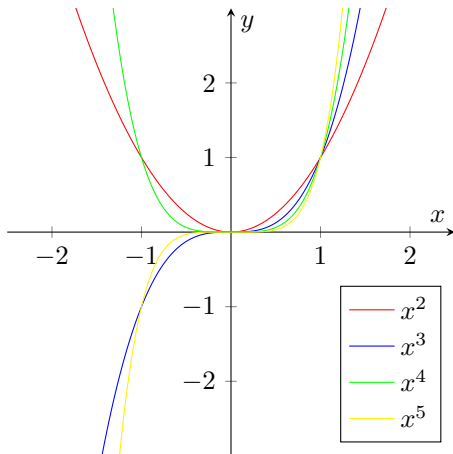
$x, x^3, \sin x$  páratlan

$x^n$  páros, ha  $n$  páros, és páratlan, ha  $n$  páratlan

# Függvénygrafikon

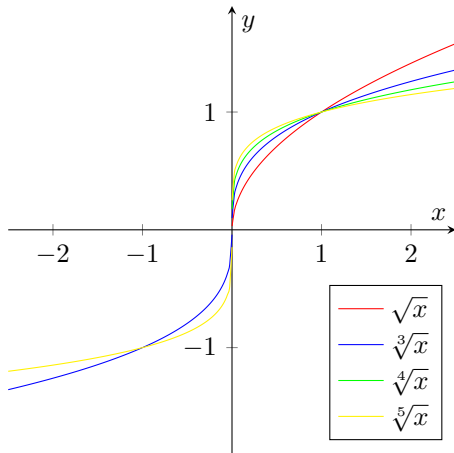
Az  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$  ( $D_f \subseteq \mathbb{R}$ ) függvény grafikonja  $\{(x, f(x)) \mid x \in D_f\}$ .

Az  $x^n$  függvény ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ) grafikonja páros  $n$  esetén parabolához hasonlít, míg páratlan  $n \geq 3$  esetén az  $x^3$  grafikonjához.



# Függvénygrafikon: gyökfüggvények

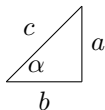
Az  $\sqrt[n]{x}$  függvény páros  $n$  esetén csak a nemnegatív értékekre van értelmezve.



# Trigonometrikus függvények

Derékszögű háromszögben ( $\alpha$  hegyesszög):

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$



Általánosan:

Az  $x$  tengellyel  $\varphi$  szöget bezáró egységvektor vetülete  
az  $x$  tengelyre  $\cos \varphi$ ,  
az  $y$  tengelyre  $\sin \varphi$ .

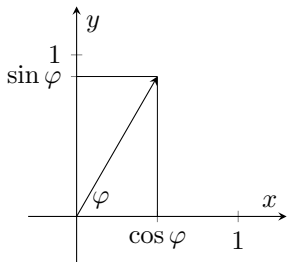
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}, \quad \operatorname{ctg} \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$$

Összefüggés:

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$$

Addíciós tételek:

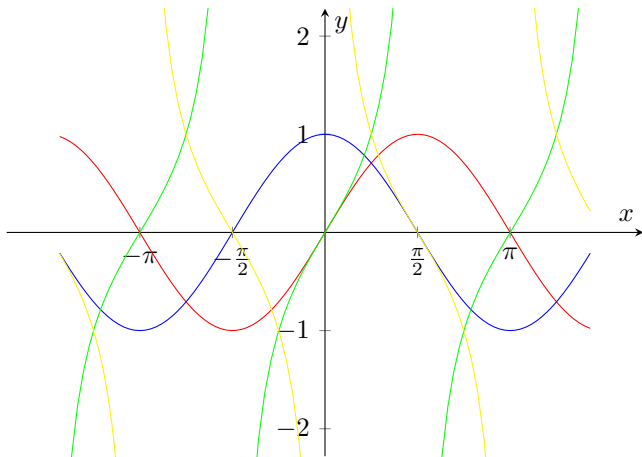
$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & \Rightarrow & \sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & \Rightarrow & \cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{aligned}$$





# Trigonometrikus függvények függvénygrafikonjai

A  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$ ,  $\operatorname{ctg} x$  függvények grafikonjai:

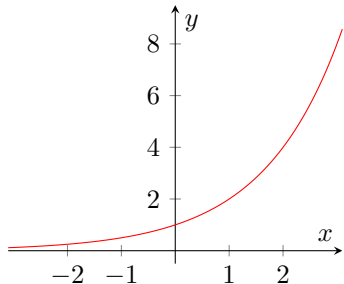


# Exponenciális függvény

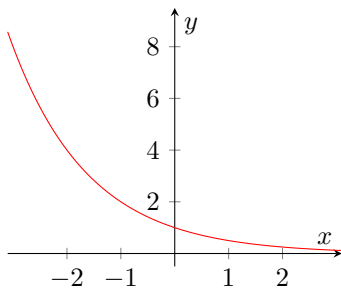
Ha  $x = \frac{p}{q}$  racionális ( $p, q$  egész) és  $a$  pozitív, akkor  $a^x = \sqrt[q]{a^p}$ .

Ezt a függvényt „szépen” kiterjeszthetjük az összes valós számra.

$a > 1$  esetén ( $a = 2$ )



$0 < a < 1$  esetén ( $a = \frac{1}{2}$ )



Az  $x \mapsto a^x$  függvényt exponenciális (hatványkitevő) függvénynek nevezzük.

Az  $a = e = 2,718281828459 \dots$  esetén „az” exponenciális függvény (jelölés még:  $\exp(x)$ ).

# Exponenciális függvények azonosságai

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$a^{x+y} = a^x a^y$$

$$a^{xy} = (a^x)^y$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$$

$$a^x b^x = (ab)^x$$

# Hiperbolikus függvények

## koszinusz hiperbolikus

(hiperbolikus koszinusz)

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

páros, konvex és  $\operatorname{ch} x \geq 1$ ,

jelölés még:  $\operatorname{cosh}$

## szinusz hiperbolikus

(hiperbolikus szinusz)

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

páratlan, monoton nő,

jelölés még:  $\operatorname{sinh}$

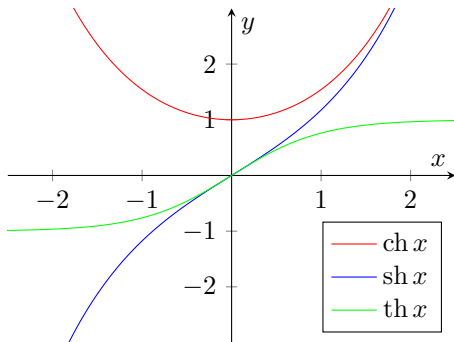
## tangens hiperbolikus

(hiperbolikus tangens)

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

páratlan, monoton nő, értéke  $-1$  és  $1$  között,

jelölés még:  $\operatorname{tanh}$



Összefüggés:

$$\operatorname{sh}^2 x + 1 = \operatorname{ch}^2 x$$

# Hiperbolikus függvények tulajdonságainak bizonyítása

A monotonitást és a konvexitás bizonyítására később lesznek eszközeink.

A koszinusz hiperbolikus többi tulajdonságainak bizonyítása:

A párosságot  $-x$  behelyettesítéssel látjuk be:

$$\operatorname{ch}(-x) = \frac{e^{(-x)} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch}(x)$$

Az alsó korlát bizonyításához a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséget használjuk:

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \geq \sqrt{e^x e^{-x}} = \sqrt{e^{x-x}} = \sqrt{e^0} = \sqrt{1} = 1$$

Házi feladat a másik két függvény paritásának és a tangens hiperbolikus alsó és felső korlátjának bizonyítása.

Összefüggés bizonyítása:

$$\operatorname{sh}^2 x + 1 = \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4} + 1 = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x} + 4}{4} = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} = \operatorname{ch}^2 x$$

# Inverz

Az  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$  ( $D_f \subseteq \mathbb{R}$ ) függvény **injektív**, ha az értékkészletének minden elemét pontosan egyszer veszi fel (pontosan egy olyan pont van az értelmezési tartományban, ahol ez a függvény értéke), azaz

$$x_1 \neq x_2 \in D_f \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Az  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$  ( $D_f \subseteq \mathbb{R}$ ) injektív függvény **inverze** az a  $f^{-1}$ -gyel jelölt függvény, melyre  $f^{-1}(y) = x$ , ha  $f(x) = y$ , azaz  $f^{-1}(f(x)) = x$ .

Az  $f^{-1}$  inverz függvény értelmezési tartománya az  $f$  függvény értékkészlete. (Az  $f^{-1}$  inverz függvény értékkészlete az  $f$  függvény értelmezési tartománya.)

Példák:

$f(x) = |x|$  nem injektív, így nincs inverze

$f(x) = x$  inverze önmaga:  $f^{-1}(x) = x$

$f(x) = x^3$  inverze  $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

$f(x) = x^2$  nem injektív, de ha csak a  $[0, +\infty)$  intervallumon értelmezzük, akkor injektív, és az inverze:  $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

$f(x) = a^x$  inverze  $f^{-1}(x) = \log_a(x)$

$f(x) = e^x$  inverze  $f^{-1}(x) = \ln x = \log_e(x)$

# A logaritmus függvény azonosságai

A logaritmus függvények értelmezési tartománya:  $(0, +\infty)$ .

$$\log_a(1) = 0$$

$$\log_a(a) = 1$$

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x)$$

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

## Függvények invertálása

Az  $f(x) = 3x + 1$  függvény inverze:

$$f(x) = y$$

$$3x + 1 = y$$

$$3x = y - 1$$

$$x = \frac{y - 1}{3},$$

tehát  $f^{-1}(y) = \frac{y - 1}{3}$ , azaz  $f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{3}$ .

Az  $g(x) = \sqrt[3]{x^5 - 1}$  függvény inverze:



## Függvények invertálása

Az  $f(x) = 3x + 1$  függvény inverze:

$$f(x) = y$$

$$3x + 1 = y$$

$$3x = y - 1$$

$$x = \frac{y - 1}{3},$$

tehát  $f^{-1}(y) = \frac{y - 1}{3}$ , azaz  $f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{3}$ .

Az  $g(x) = \sqrt[3]{x^5 - 1}$  függvény inverze:

$$g(x) = y$$

$$\sqrt[3]{x^5 - 1} = y$$

$$x^5 - 1 = y^3$$

$$x^5 = y^3 + 1$$

$$x = \sqrt[5]{y^3 + 1},$$

tehát  $g^{-1}(y) = \sqrt[5]{y^3 + 1}$ , azaz  $g^{-1}(x) = \sqrt[5]{x^3 + 1}$ .

# Színusz inverze

A  $\sin x$  nem injektív:

pl.  $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$ .

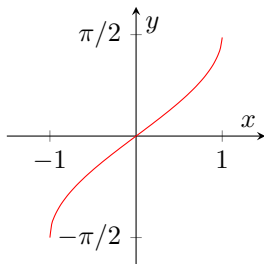
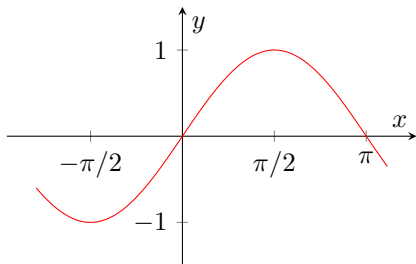
De az

$$f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$
$$x \mapsto \sin x$$

függvény már injektív, így vehetjük az inverzét.

Inverze:

$$\arcsin x: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



# Trigonometrikus függvények inverze

Hasonlóan a  $\cos x$  nem injektív, de a  $[0, \pi]$ -re megszorítva már igen.

Itt az inverze:  $\arccos x: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ .

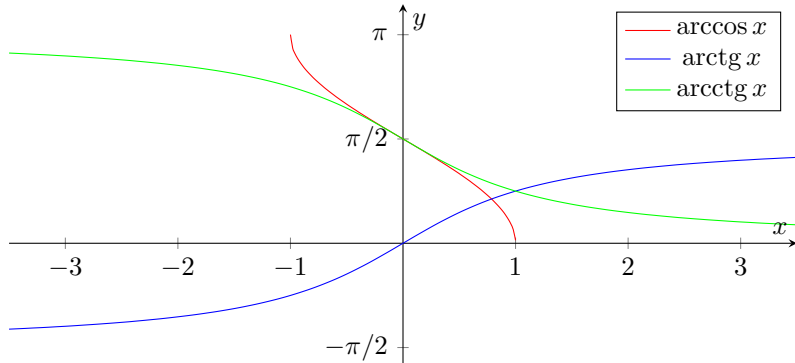
Megjegyzés:  $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$  (mivel  $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ ).

A  $\operatorname{tg} x$  függvényt a  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ -re kell megszorítani, hogy injektív legyen.

Itt az inverze:  $\operatorname{arctg} x: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .

A  $\operatorname{ctg} x$  függvényt a  $(0, \pi)$ -re kell megszorítani, hogy injektív legyen.

Itt az inverze:  $\operatorname{arcctg} x: \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$ . Megjegyzés:  $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$ .



# Hiperbolikus függvények inverze

A  $\operatorname{ch} x$  függvényt a  $[0, +\infty)$ -re kell megszorítani, hogy injektív legyen.

Itt az inverze **area koszinusz hiperbolikus**:

$\operatorname{arch} x: [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$

$$\operatorname{arch} x = \ln \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right)$$

A  $\operatorname{sh} x$  függvény injektív.

Inverze **area szinusz hiperbolikus**:

$\operatorname{arsh} x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

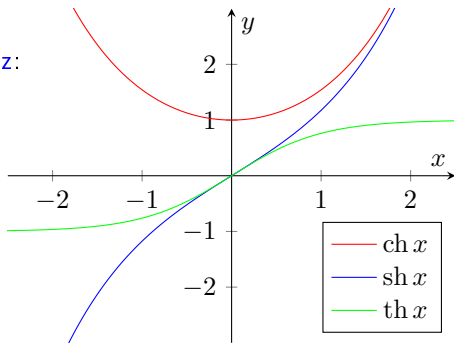
$$\operatorname{arsh} x = \ln \left( x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

A  $\operatorname{th} x$  függvény injektív.

Inverze **area tangens hiperbolikus**:

$\operatorname{arth} x: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$$



# Hiperbolikus függvények inverze – bizonyítás

Feladat:

Határozzuk meg a koszinusz hiperbolikus (nemnegatív számokra vett megszorításának) inverzét.

# Hiperbolikus függvények inverze – bizonyítás

Feladat:

Határozzuk meg a koszinusz hiperbolikus (nemnegatív számokra vett megszorításának) inverzét.

$$\begin{aligned}\operatorname{ch} x &= y \\ \frac{e^x + e^{-x}}{2} &= y \\ e^x + e^{-x} &= 2y \\ e^{2x} + 1 &= 2ye^x \\ (e^x)^2 + 1 - 2ye^x &= 0 \\ t^2 - 2yt + 1 &= 0,\end{aligned}$$

ahol  $t = e^x$ . Az utolsó egyenlet  $t$ -re egy másodfokú egyenlet, amit a megoldóképlettel megoldhatunk:

$$t = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 - 1}.$$

## Hiperbolikus függvények inverze – folytatás

$$t = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 - 1}.$$

Mivel  $t = e^x$  legalább 1 (nemnegatív számokra vett megszorítással dolgozunk), így a  $-$  előjel nem jó, mert:

$$y - \sqrt{y^2 - 1} = (y - \sqrt{y^2 - 1}) \frac{y + \sqrt{y^2 - 1}}{y + \sqrt{y^2 - 1}} = \frac{y^2 - (y^2 - 1)}{y + \sqrt{y^2 - 1}} = \frac{1}{y + \sqrt{y^2 - 1}} < 1,$$

ha  $y > 1$  (ch  $x \geq 1$ ). Tehát:

$$\begin{aligned}e^x &= y + \sqrt{y^2 - 1} \\x &= \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})\end{aligned}$$

Így az inverz:

$$\operatorname{arch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}),$$

ahogy szerepelt a korábbi dián.

Házi feladat a másik két hiperbolikus függvény inverzének kiszámolása.

# Függvénykompozíció

Ha  $f: A \rightarrow B$  és  $g: B \rightarrow C$ , akkor

$$g \circ f: A \rightarrow C$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

A  $g$  a **külső**, míg  $f$  a **belső függvény**.

Ha  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$  és  $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$  ( $D_f, D_g \subseteq \mathbb{R}$ ), akkor a  $g \circ f$  összetett függvény értelmezési tartománya:

$$\{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in D_f \text{ és } f(x) \in D_g\}.$$

Példa:

$$f(x) = \sqrt{x} \quad (D_f = [0, +\infty)) \text{ és } g(x) = 2x + 1$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} + 1 \quad x \geq 0$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x + 1) = \sqrt{2x + 1} \quad 2x + 1 \geq 0$$