

5. előadás

Sorozatok

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2023. szeptember 20.

Definíció

Minden természetes számhoz hozzárendelünk egy valós számot.

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Megadhatjuk rekurzívan, pl.:

$$a_{n+1} = a_n + 5$$

számtani sorozat

$$a_{n+1} = 5a_n$$

mértani sorozat

Vagy expliciten formulával, pl.:

$$a_n = \frac{1}{n}.$$

Általában a végtelenbeli határértéket fogjuk vizsgálni, tulajdonképpen a „végtelen megközelítése”.

Tulajdonságok

A függvényekhez hasonlóan:

A sorozat

monoton nő, ha $n < m$ esetén $a_n \leq a_m$

szigorúan monoton nő, ha $n < m$ esetén $a_n < a_m$

monoton csökken, ha $n < m$ esetén $a_n \geq a_m$

szigorúan monoton csökken, ha $n < m$ esetén $a_n > a_m$

alulról korlátos, ha létezik $k \in \mathbb{R}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \geq k$

felülről korlátos, ha létezik $K \in \mathbb{R}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq K$

korlátos, ha létezik $K \in \mathbb{R}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|a_n| \leq K$

legnagyobb alsó korlát $\inf a_n$

legkisebb felső korlát $\sup a_n$

Határérték

Legyen

$$a_1 = 2,9$$

$$a_2 = 2,99$$

$$a_3 = 2,999$$

$$a_4 = 2,9999$$

...

A nagy indexű tagok mihez lesznek közel? Hova „tart” a sorozat?

Úgy tűnik, hogy a 3-hoz.

Ezt nevezzük a sorozat határértékének.

Közel vagyunk a 3-hoz, ha elegendően nagy indexű tagokat tekintünk.

Ezt így tudjuk megfogalmazni:

Az a_n sorozat határértéke az $A \in \mathbb{R}$ szám, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $n \geq N$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$.

Jelölés: $a_n \rightarrow A$ vagy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$.

Példa

$a_n = \frac{1}{n}$ határértéke 0, mert minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik N küszöbindex, hogy $n > N$ esetén $|a_n - 0| < \varepsilon$.

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{\varepsilon} < n$$

Tehát $N = \frac{1}{\varepsilon}$ jó küszöbindex ε -hoz.

Egy másik

$$a_n = 2 - \frac{(-1)^n}{3^n} \text{ határértéke}$$

Egy másik

$a_n = 2 - \frac{(-1)^n}{3^n}$ határértéke 2:

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

$$\left| 2 - \frac{(-1)^n}{3^n} - 2 \right| < \varepsilon$$

$$\left| -\frac{(-1)^n}{3^n} \right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{3^n} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{\varepsilon} < 3^n$$

$$\log_3 \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) < n$$

Tehát $N = \log_3 \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)$ jó küszöbindex ε -hoz.

Végtelen határérték

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 4$$

$$a_3 = 6$$

$$a_4 = 8$$

...

Ez „kiszalad” a végtelenbe. Tehát bármely számnál egy idő után a sorozat minden tagja nagyobb lesz:

Az a_n sorozat határértéke a $+\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$ -hez létezik $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $n \geq N$ esetén $a_n > K$.

Jelölés: $a_n \rightarrow +\infty$ vagy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

Hasonlóan mínusz végtelen is:

Az a_n sorozat határértéke a $-\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$ -hez létezik $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $n \geq N$ esetén $a_n < K$.

Jelölés: $a_n \rightarrow -\infty$ vagy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

$a_n = n^2 + 3$ határértéke $+\infty$:

$$a_n > K$$

$$n^2 + 3 > K$$

$$n^2 > K - 3$$

$$n > \sqrt{K - 3}$$

Tehát $N = \sqrt{K - 3}$ jó küszöbindex K -hoz.

Konvergencia

Egy sorozat **konvergens**, ha létezik $A \in \mathbb{R}$ (véges) határértéke.

Egy sorozat **divergens**, ha nem konvergens.

Ha a sorozat határértéke $\pm\infty$, akkor divergens!

Ha egy sorozat határértéke 0, akkor **nullsorozat**.

Szükséges feltétel:

Egy konvergens sorozat korlátos.

Elégséges feltétel:

Egy monoton és korlátos sorozat konvergens.

Cauchy-féle konvergenzkritérium:

Az a_n sorozat pontosan akkor konvergens, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $n, m \geq N$ esetén $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Műveletek és a határérték

Tétel:

Ha $a_n \rightarrow A$, $b_n \rightarrow B$, akkor

$$a_n + b_n \rightarrow A + B$$

$$a_n - b_n \rightarrow A - B$$

$$a_n b_n \rightarrow AB$$

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{A}{B}, \quad \text{ha } b_n, B \neq 0$$

$$ca_n \rightarrow cA, \quad \text{ha } c \in \mathbb{R}$$

Példa:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + 7n - 9}{7n^2 - 3n + 1} =$$

Műveletek és a határérték

Tétel:

Ha $a_n \rightarrow A$, $b_n \rightarrow B$, akkor

$$a_n + b_n \rightarrow A + B$$

$$a_n - b_n \rightarrow A - B$$

$$a_n b_n \rightarrow AB$$

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{A}{B}, \quad \text{ha } b_n, B \neq 0$$

$$ca_n \rightarrow cA, \quad \text{ha } c \in \mathbb{R}$$

Példa:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + 7n - 9}{7n^2 - 3n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{7}{n} - \frac{9}{n^2}}{7 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{5}{7}$$

Nevezetes sorozatok

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0$$

$$\frac{1}{n^a} \rightarrow 0, \text{ ha } a > 0$$

$$n^a \rightarrow +\infty, \text{ ha } a > 0$$

$$q^n \rightarrow \begin{cases} +\infty, & \text{ha } q > 1 \\ 1, & \text{ha } q = 1 \\ 0, & \text{ha } |q| < 1 \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{q} \rightarrow 1, \text{ ha } q > 0$$

$$\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow \frac{1}{e}$$

$$\left(1 + \frac{q}{n}\right)^n \rightarrow e^q, \text{ ahol } q \in \mathbb{R}$$

Rendőrelv

Ha $a_n \leq b_n \leq c_n$ (ha $n \geq N$) és $a_n \rightarrow A$ és $c_n \rightarrow A$, akkor $b_n \rightarrow A$.

Példa:

$$b_n = \sqrt[n]{2 + \frac{1}{n}}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \sqrt[n]{2} & \leq & \sqrt[n]{2 + \frac{1}{n}} & \leq & \sqrt[n]{3} & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \text{ha } n \rightarrow \infty & \\ 1 & \Rightarrow & 1 & \Leftarrow & 1 & & \end{array}$$

Feladat

Mi a $\left(\frac{n+3}{n-1}\right)^{2n}$ sorozat határértéke?

Feladat

Mi a $\left(\frac{n+3}{n-1}\right)^{2n}$ sorozat határértéke?

$$\left(\frac{n+3}{n-1}\right)^{2n} = \left(\frac{1+\frac{3}{n}}{1-\frac{1}{n}}\right)^{2n} = \left(\frac{\left(1+\frac{3}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{e^3}{e^{-1}}\right)^2 = (e^4)^2 = e^8$$

Egy másik megoldási módszer:

$$\left(\frac{n+3}{n-1}\right)^{2n} = \left(\frac{n-1}{n-1} + \frac{4}{n-1}\right)^{2n} = \left(\left(1 + \frac{4}{n-1}\right)^{n-1}\right)^{\frac{2n}{n-1}} \rightarrow (e^4)^2 = e^8,$$

mert

$$\frac{2n}{n-1} = \frac{2}{1-\frac{1}{n}} \rightarrow \frac{2}{1} = 2.$$

Egy a_n sorozat **rézsorozata** a b_n sorozat, ha azt néhány elem kitörlésével kapjuk. Formálisan:

Az a_n sorozat rézsorozata a_{n_k} , ahol n_k szigorúan növekvő pozitív számokból áll.

Egy a_n sorozatnak $x \in \mathbb{R}$ **torlódási pontja**, ha x tetszőleges környezetébe a sorozat végtelen sok eleme esik. Ezzel ekvivalens: az a_n sorozatnak van olyan rézsorozata, melynek határértéke x .

Bolzano–Weierstrass-tétel:

Minden korlátos sorozatnak van konvergens rézsorozata.