6. előadás

Függvényhatárértékek

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2023. szeptember 26.

Bevezető mese

Adott egy függvény, nem formulával, hanem minden pontban lekérdezhetjük a függvény értékét.

A gonosz manó az $x_0 = 2$ pontban elrejtette a függvény értékét, nekünk kell kitalálni. Hogyan csináljuk?

Megnézzük, mi a függvény értéke $1{,}9$-ben: $16{,}3$ és $2{,}1$-ben: $15{,}8$.
Akkor talán 16??

Azért nézzük tovább:

$$\begin{array}{llll}
f(1{,}99) & = 16{,}02954 & f(2{,}01) & = 15{,}97987 \\
f(1{,}999) & = 16{,}00393 & f(2{,}001) & = 15{,}99812 \\
f(1{,}9999) & = 16{,}00041 & f(2{,}0001) & = 15{,}99976 \\
f(1{,}99999) & = 16{,}00002 & f(2{,}00001) & = 15{,}99998
\end{array}$$

Hát, így már elég meggyőző, hogy $f(2) = 16$.
De ebben soha sem lehetünk biztosak.
Mit tudunk biztosan?
Ha közel vagyunk az $x_0 = 2$-höz, akkor a függvényérték is közel van a 16-hoz.

Úton a definíció felé

Ha közel vagyunk az $x_0 = 2$-höz, akkor a függvényérték is közel van a 16-hoz.
Jó-jó, de mennyire van közel?
Mondjuk 3 tizedesjegyre stimmel, ha elég közel mentünk a 2-höz.
De mit jelent, hogy elég közel? Legfeljebb $0{,}002$ az eltérés.
És ha más pontosságot szeretnénk?
Arra is lesz valami eltérés maximum!

Tehát:
Ha adott egy pontosság, hogy mennyire szeretnénk közel kerülni a 16-hoz, azaz mondjuk legfeljebb ε eltérést szeretnénk.
Akkor ehhez van egy másik eltérés, legyen δ, hogy ha 2-höz δ-nál közelebb vagyunk, akkor teljesülni fog a kívánságunk.

Még pontosabban:
Ha adott $\varepsilon > 0$, akkor ahhoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - 2| < \delta$, akkor $|f(x) - 16| < \varepsilon$.

Határérték definíciója

Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az x_0 pontban a határértéke A, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$ és $x \neq x_0$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Nem biztos, hogy a függvény mindenütt értelmes, de azt fel kell tennünk, hogy x_0 közelében értelmes, azaz:

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az x_0 pontban a határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$ és $x \neq x_0$, akkor $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Nem követeljük meg, hogy a függvény x_0-ban értelmezve legyen.

Kicsit egyszerűbben felírva:
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az x_0 pontban a határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Jelölés:
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ vagy $f(x) \to A$, ha $x \to x_0$.

Egy példa

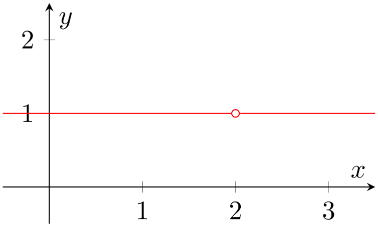
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az x_0 pontban a határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.
Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

Az $f(x) = \dfrac{x-2}{x-2}$ függvény értelmezési tartománya: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Mennyi a határértéke $x_0 = 2$-ben?

Ha $x \neq 2$, akkor $f(x) = 1$, így $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$.

Definiálhatnánk így is a függvényt:
$f\colon \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$,
$f(x) = 1 \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ esetén.



De a következő is egy függvény:

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \neq 2 \\ 9, & \text{ha } x = 2 \end{cases}$$

Ekkor $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 1$, mert a 2-beli érték nem számít a határértéknél.

Még egy példa

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az x_0 pontban a határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.
Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

Példa:

Az $f(x) = 3x + 1$ függvény $x_0 = 2$-ben.

A határérték „valószínűleg" $f(2) = 7$.

Mi lesz a δ egy adott $\varepsilon > 0$-hoz?

Az kell, hogy

$$\begin{aligned} |f(x) - A| &< \varepsilon \\ |3x + 1 - 7| &< \varepsilon \\ |3x - 6| &< \varepsilon \\ 3 \cdot |x - 2| &< \varepsilon \\ |x - 2| &< \frac{\varepsilon}{3}, \end{aligned}$$

ami teljesül, ha $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Az egészrész függvény

Az $f: D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az x_0 pontban a határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.
Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

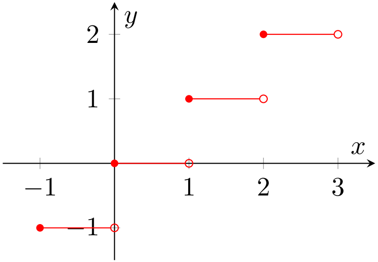
Mi a helyzet az $f(x) = [x]$ egészrész függvénnyel $x_0 = 2$-ben?

Ha $|x - 2| < \delta < 1$ és $x \neq 2$, akkor

- $f(x) = 2$, ha $x > 2$, és
- $f(x) = 1$, ha $x < 2$.

Tehát $|f(x) - A| < \varepsilon < \frac{1}{2}$ nem teljesül sem $A = 1$-gyel, sem $A = 2$-vel.

Így a határérték nem létezik.



Jobb és bal oldali határérték

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az x_0 pontban a határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.
Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

Érdemes külön tekinteni a két oldalt:

Jobb oldali határérték ($x_0 < x$):
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az x_0 pontban a jobb oldali határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < x - x_0 < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.
Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = A$ vagy $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = A$.

Bal oldali határérték ($x < x_0$):
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az x_0 pontban a bal oldali határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < x_0 - x < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.
Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = A$ vagy $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = A$.

Két tétel

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az x_0 pontban a határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.
Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

Tétel:
Ha az f függvénynek x_0 pontban létezik a jobb és bal oldali határértéke, és ezek egyenlőek, akkor a függvénynek létezik az x_0 pontban határértéke, és ez megegyezik a jobb és bal oldali határértékkel.

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = A = \lim_{x \to x_0+} f(x) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

Tétel:
Ha létezik a határérték, akkor egyértelmű:
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ és $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = B$ esetén $A = B$.

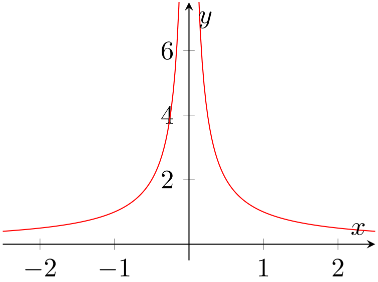
Indirekt bizonyítás: $\varepsilon = \frac{|A-B|}{3}$-hoz nincs jó δ.

Végtelen határérték

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az x_0 pontban a határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.
Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

Mi a helyzet az $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$ függvénnyel a 0 pontban?

Minél közelebb vagyunk a 0-hoz annál nagyobb a függvény, végtelenhez tart.



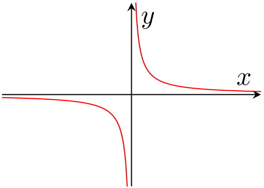
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az x_0 pontban a határértéke $+\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $f(x) > K$.
Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

Végtelen határérték – variációk

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az x_0 pontban a határértéke $+\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $f(x) > K$.

Lehet mínusz végtelen is a határérték, ekkor a függvényérték nagyon kicsi:
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az x_0 pontban a határértéke $-\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $f(x) < K$.
Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Ezekben az esetekben is lehet jobb vagy bal oldali határértéket venni, pl.:
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az x_0 pontban a jobb oldali határértéke $+\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < x - x_0 < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $f(x) > K$.
Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = +\infty$.



Stb...

Példa: $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ és $\lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{1}{x} = -\infty$.

Határérték a végtelenben

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az x_0 pontban a határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Nem csak a határérték lehet végtelen, hanem az x_0 pont is.
Ekkor a δ „helyett" K szám van:

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek a $+\infty$-ben a határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy $K < x$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.
Jelölés: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$.

Példa: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

Természetesen ez a $-\infty$-ben is hasonlóan működik:
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek a $-\infty$-ben a határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy $K > x$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.
Jelölés: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

Megjegyzés: A végtelenben nincs külön jobb és bal oldali határérték.

Végtelenben végtelen

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ $(D_f \subseteq \mathbb{R})$ függvénynek a $+\infty$-ben a határértéke $+\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez van olyan $L \in \mathbb{R}$, hogy $L < x$ esetén $x \in D_f$ és $f(x) > K$.
Jelölés: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Hasonlóan:
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ $(D_f \subseteq \mathbb{R})$ függvénynek a $+\infty$-ben a határértéke $-\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez van olyan $L \in \mathbb{R}$, hogy $L < x$ esetén $x \in D_f$ és $f(x) < K$.
Jelölés: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ $(D_f \subseteq \mathbb{R})$ függvénynek a $-\infty$-ben a határértéke $+\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez van olyan $L \in \mathbb{R}$, hogy $L > x$ esetén $x \in D_f$ és $f(x) > K$.
Jelölés: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ $(D_f \subseteq \mathbb{R})$ függvénynek a $-\infty$-ben a határértéke $-\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez van olyan $L \in \mathbb{R}$, hogy $L > x$ esetén $x \in D_f$ és $f(x) < K$.
Jelölés: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Összefoglalás

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek

az x_0 pontban a
az x_0 pontban a jobb oldali
az x_0 pontban a bal oldali
a $+\infty$-ben a
a $-\infty$-ben a

határértéke $A \in \mathbb{R}$, / $+\infty$, / $-\infty$, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz / $K \in \mathbb{R}$-hez / $K \in \mathbb{R}$-hez van olyan $\delta > 0$, / $\delta > 0$, / $\delta > 0$, / $L \in \mathbb{R}$, / $L \in \mathbb{R}$, hogy

$0 < |x - x_0| < \delta$
$0 < x - x_0 < \delta$
$0 < x_0 - x < \delta$
$L < x$
$L > x$

esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$. / $f(x) > K$. / $f(x) < K$.

Kapcsolat a sorozatokkal

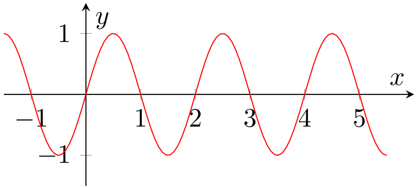
Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, akkor sokszor

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} a_n, \text{ ahol } a_n = f(n),$$

de nem mindig, például:

$f(x) = \sin(\pi x)$ esetén

- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ nem létezik,
- de $a_n = f(n) = 0$, így $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.



Átviteli elv:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ ekvivalens azzal, hogy minden $x_n \to x_0$ sorozatra $(x_n \neq x_0)$ az $a_n = f(x_n)$ sorozat határértéke A.

Hasonlóan lehet jobb és bal oldali határértékekre, és végtelen határértékekre is:

- jobb oldali határérték: feltesszük, hogy $x_0 < x_n$
- bal oldali határérték: feltesszük, hogy $x_n < x_0$
- végtelen határérték: A és x_0 is lehet $\pm\infty$

Műveletek és a határérték

Ha az $f(x)$ és $g(x)$ függvényeknek létezik határértéke x_0-ban, akkor

$$\lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}(f-g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)},\ \text{feltéve, hogy } g \neq 0 \text{ az } x_0 \text{ egy környezetében.}$$

Hasonló állítások igazak jobb és bal oldali, és végtelenbe vett határértékekre is.

Sőt, még a határérték is lehet végtelen, ha „elvégezhető a művelet'' ($a \in \mathbb{R}$):

$$\pm\infty + a = \pm\infty, \quad a \cdot \pm\infty = \pm\infty\ (a>0), \quad \frac{\pm\infty}{a} = \pm\infty\ (a>0),$$

$$\text{de } \infty - \infty = ?, \quad 0\cdot\infty = ?, \quad \frac{0}{0} = ?, \quad \frac{\infty}{\infty} = ?$$

Ha $g\colon A \to B$ és $f\colon B \to C$, és tegyük fel, hogy x_0-ban g-nek y_0 a határértéke, és y_0-ban f-nek van határértéke (továbbá $g(x) \neq y_0$, ha $x \neq x_0$), akkor

$$\lim_{x\to x_0}(f\circ g)(x) = \lim_{y\to y_0} f(y),\ \text{ahol } y_0 = \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Rendőrelv

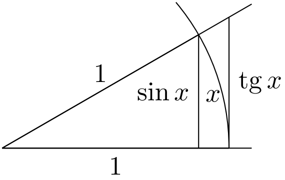
Tegyük fel, hogy az $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényekre teljesül, hogy

$$f(x) \le g(x) \le h(x) \text{ minden } x \in \mathbb{R}\text{-re},$$

és tegyük fel, hogy f és h függvényeknek a határértéke x_0-ban A (mindkettőnek). Ekkor a g függvény határértéke x_0-ban szintén A.

Példa: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Tudjuk, hogy $0 < x < \frac{\pi}{2}$ esetén



$$\begin{array}{ccccc} \sin x & \le & x & \le & \operatorname{tg} x \\ 1 & \le & \dfrac{x}{\sin x} & \le & \dfrac{1}{\cos x} \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ 1 & & & & 1 \end{array} \quad \text{ha } x \to 0$$

Ekkor a rendőrelv szerint $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{x}{\sin x} = 1$, és mivel páros függvény, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$.

Így $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\frac{x}{\sin x}} = \dfrac{1}{1} = 1.$

Nevezetes határértékek

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \text{ nem létezik, de}$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x\to 0+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$$

Feladatok

$$\lim_{x \to 2} \frac{x+3}{2x+1} =$$

Feladatok

$$\lim_{x \to 2} \frac{x+3}{2x+1} = \frac{2+3}{2 \cdot 2 + 1} = 1$$

Feladatok

$$\lim_{x \to 2} \frac{x+3}{2x+1} = \frac{2+3}{2 \cdot 2+1} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2+x}{x^2-2x} =$$

Feladatok

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+3}{2x+1}=\frac{2+3}{2\cdot 2+1}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x^2-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)}{x(x-2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{x-2}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$$

Feladatok

$$\lim_{x\to 2} \frac{x+3}{2x+1} = \frac{2+3}{2\cdot 2+1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{x^2-2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x+1)}{x(x-2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x+1}{x-2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-4x+3}{x-1} =$$

Feladatok

$$\lim_{x \to 2} \frac{x+3}{2x+1} = \frac{2+3}{2 \cdot 2 + 1} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2+x}{x^2-2x} = \lim_{x \to 0} \frac{x(x+1)}{x(x-2)} = \lim_{x \to 0} \frac{x+1}{x-2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-4x+3}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x-3)}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x-3) = -2$$

Feladatok

$$\lim_{x\to 2} \frac{x+3}{2x+1} = \frac{2+3}{2\cdot 2+1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{x^2-2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x+1)}{x(x-2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x+1}{x-2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-4x+3}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-3)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x-3) = -2$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2} =$$

Feladatok

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+3}{2x+1}=\frac{2+3}{2\cdot 2+1}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x^2-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)}{x(x-2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{x-2}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-3)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x-3)=-2$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x-1}=\frac{-1}{1}=-1$$

Feladatok – gyöktelenítés

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$$

Feladatok – gyöktelenítés

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}\,\frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)-4}{(x-2)\big(\sqrt{x+2}+2\big)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)\big(\sqrt{x+2}+2\big)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}$$

Feladatok – gyöktelenítés

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}\,\frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)-4}{(x-2)\big(\sqrt{x+2}+2\big)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)\big(\sqrt{x+2}+2\big)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{3-2x}-1}$$

Feladatok – gyöktelenítés

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}\,\frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)-4}{(x-2)\big(\sqrt{x+2}+2\big)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)\big(\sqrt{x+2}+2\big)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{3-2x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\big(\sqrt{x+3}-2\big)\,\frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2}}{\big(\sqrt{3-2x}-1\big)\,\frac{\sqrt{3-2x}+1}{\sqrt{3-2x}+1}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x+3-2^2}{\sqrt{x+3}+2}}{\frac{3-2x-1^2}{\sqrt{3-2x}+1}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2}}{\frac{-2(x-1)}{\sqrt{3-2x}+1}}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3-2x}+1}{(-2)(\sqrt{x+3}+2)}=\frac{\sqrt{3-2}+1}{(-2)(\sqrt{1+3}+2)}=\frac{2}{-8}=-\frac{1}{4}$$

Feladatok – folytatás

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(5x)}{7x}$$

Feladatok – folytatás

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{7x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{5x}\frac{5x}{7x} = \frac{5}{7},$$

mert $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{5x} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y}$, ha $y = 5x$.

Feladatok – folytatás

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{7x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{5x}\frac{5x}{7x}=\frac{5}{7},$$

mert $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(5x)}{5x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin(y)}{y}$, ha $y=5x$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-3}{x-1}$$

Feladatok – folytatás

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{7x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{5x}\frac{5x}{7x} = \frac{5}{7},$$

mert $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(5x)}{5x} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sin(y)}{y}$, ha $y = 5x$.

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-3}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x-1}{x-1} - \dfrac{2}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to 1} \left(1 - \dfrac{2}{x-1}\right)$ nem létezik, de

Feladatok – folytatás

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{7x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{5x}\frac{5x}{7x} = \frac{5}{7},$$

mert $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(5x)}{5x} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sin(y)}{y}$, ha $y = 5x$.

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-3}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x-1}{x-1} - \dfrac{2}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to 1} \left(1 - \dfrac{2}{x-1}\right)$ nem létezik, de

$$\lim_{x\to 1+} \frac{x-3}{x-1} = \lim_{x\to 1+} \left(1 - \frac{2}{x-1}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1-} \frac{x-3}{x-1} = \lim_{x\to 1-} \left(1 - \frac{2}{x-1}\right) = +\infty$$

Feladatok – polinomos törtek

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5 + 4x^3 - 12x^2 + 3}{x^3 - 7x^2 + 6x - 7}$$

Feladatok – polinomos törtek

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5+4x^3-12x^2+3}{x^3-7x^2+6x-7} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4-\frac{12}{x}+\frac{3}{x^3}}{1-\frac{7}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{7}{x^3}} = +\infty$$

Feladatok – polinomos törtek

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5+4x^3-12x^2+3}{x^3-7x^2+6x-7} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4-\frac{12}{x}+\frac{3}{x^3}}{1-\frac{7}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{7}{x^3}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+7x-2}{x^4-8x^3-7x+2}$$

Feladatok – polinomos törtek

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5+4x^3-12x^2+3}{x^3-7x^2+6x-7} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4-\frac{12}{x}+\frac{3}{x^3}}{1-\frac{7}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{7}{x^3}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+7x-2}{x^4-8x^3-7x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^3}-\frac{2}{x^4}}{1-\frac{8}{x}-\frac{7}{x^3}+\frac{2}{x^4}} = 0$$

Feladatok – polinomos törtek

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5+4x^3-12x^2+3}{x^3-7x^2+6x-7} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4-\frac{12}{x}+\frac{3}{x^3}}{1-\frac{7}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{7}{x^3}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+7x-2}{x^4-8x^3-7x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^3}-\frac{2}{x^4}}{1-\frac{8}{x}-\frac{7}{x^3}+\frac{2}{x^4}} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4-3x^3-2x^2+3x+2}{x^3+5x^2+6x-7}$$

Feladatok – polinomos törtek

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5+4x^3-12x^2+3}{x^3-7x^2+6x-7} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4-\frac{12}{x}+\frac{3}{x^3}}{1-\frac{7}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{7}{x^3}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+7x-2}{x^4-8x^3-7x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^3}-\frac{2}{x^4}}{1-\frac{8}{x}-\frac{7}{x^3}+\frac{2}{x^4}} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4-3x^3-2x^2+3x+2}{x^3+5x^2+6x-7} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-3-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{1+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{7}{x^3}} = -\infty$$

Feladatok – polinomos törtek

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5+4x^3-12x^2+3}{x^3-7x^2+6x-7} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4-\frac{12}{x}+\frac{3}{x^3}}{1-\frac{7}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{7}{x^3}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+7x-2}{x^4-8x^3-7x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^3}-\frac{2}{x^4}}{1-\frac{8}{x}-\frac{7}{x^3}+\frac{2}{x^4}} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4-3x^3-2x^2+3x+2}{x^3+5x^2+6x-7} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-3-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{1+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{7}{x^3}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+3x}{6-4x^2}$$

Feladatok – polinomos törtek

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5+4x^3-12x^2+3}{x^3-7x^2+6x-7} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4-\frac{12}{x}+\frac{3}{x^3}}{1-\frac{7}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{7}{x^3}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+7x-2}{x^4-8x^3-7x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^3}-\frac{2}{x^4}}{1-\frac{8}{x}-\frac{7}{x^3}+\frac{2}{x^4}} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4-3x^3-2x^2+3x+2}{x^3+5x^2+6x-7} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-3-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{1+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{7}{x^3}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+3x}{6-4x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+\frac{3}{x}}{\frac{6}{x^2}-4} = -\infty$$

Feladatok – polinomos törtek

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5+4x^3-12x^2+3}{x^3-7x^2+6x-7} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4-\frac{12}{x}+\frac{3}{x^3}}{1-\frac{7}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{7}{x^3}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+7x-2}{x^4-8x^3-7x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^3}-\frac{2}{x^4}}{1-\frac{8}{x}-\frac{7}{x^3}+\frac{2}{x^4}} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4-3x^3-2x^2+3x+2}{x^3+5x^2+6x-7} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-3-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{1+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{7}{x^3}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+3x}{6-4x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+\frac{3}{x}}{\frac{6}{x^2}-4} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^5+4x^3-12x^2+3}{x^3-7x^2+6x-7}$$

Feladatok – polinomos törtek

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5+4x^3-12x^2+3}{x^3-7x^2+6x-7} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4-\frac{12}{x}+\frac{3}{x^3}}{1-\frac{7}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{7}{x^3}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+7x-2}{x^4-8x^3-7x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^3}-\frac{2}{x^4}}{1-\frac{8}{x}-\frac{7}{x^3}+\frac{2}{x^4}} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4-3x^3-2x^2+3x+2}{x^3+5x^2+6x-7} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-3-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{1+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{7}{x^3}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+3x}{6-4x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+\frac{3}{x}}{\frac{6}{x^2}-4} = -\infty$$

$$\lim_{x\to0} \frac{x^5+4x^3-12x^2+3}{x^3-7x^2+6x-7} = \frac{3}{-7} = -\frac{3}{7}$$