8. előadás

Differenciálszámítás

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2023. október 3.

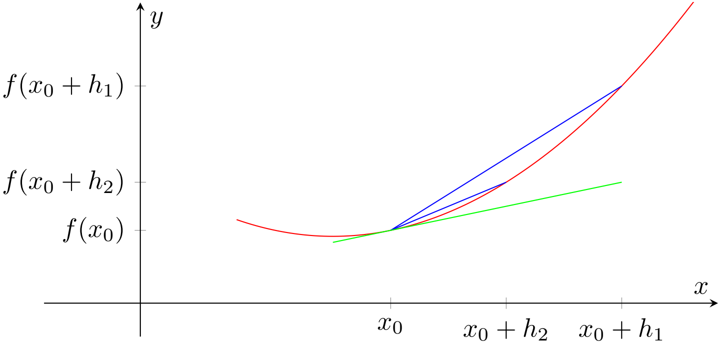
Differenciahányados

Az $f: D_f \to \mathbb{R}$ ($(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény x_0-hoz tartozó differenciahányadosa

$$F_{x_0}(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

ahol $0 < |h| < \delta$.

Ez a szelők meredeksége.



Differenciálhányados

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($(x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény x_0-hoz tartozó differenciálhányadosa (vagy deriváltja)

$$\lim_{h\to 0} F_{x_0}(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Jelölése: $f'(x_0)$, $\dot{f}(x_0)$, $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$ vagy $\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0}$, stb.

Ha az f függvénynek létezik a differenciálhányadosa az x_0 pontban, akkor az f függvény differenciálható/deriválható/diffható az x_0-ban.

Az f függvény differenciálható, ha az értelmezési tartományának minden pontjában differenciálható.

Egy differenciálható f függvény derivált függvénye:

$$f'\colon x_0 \mapsto f'(x_0).$$

Egy példa

Legyen $f(x) = x^2$ függvény.
Differenciahányadosa az x_0 pontban:

$$F_{x_0}(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} =$$
$$= \frac{2x_0h + h^2}{h} = 2x_0 + h.$$

A differenciálhányadosa:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} F_{x_0}(h) = \lim_{h \to 0}(2x_0 + h) = 2x_0.$$

Így az f függvény derivált függvénye az $x_0 \mapsto 2x_0$ függvény.

Ezt így is írhatjuk:

$$\left(x^2\right)' = 2x.$$

Még egy példa

Legyen $f(x) = \sin x$ függvény.

Még egy példa

Legyen $f(x) = \sin x$ függvény. Differenciahányadosa az x_0 pontban:

$$F_{x_0}(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{\sin(x_0+h) - \sin(x_0)}{h} =$$
$$= \frac{\sin(x_0)\cos h + \cos(x_0)\sin h - \sin(x_0)}{h} =$$
$$= \frac{\sin(x_0)(\cos h - 1) + \cos(x_0)\sin h}{h}$$

A differenciálhányadosa:

$$\lim_{h\to 0} F_{x_0}(h) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0)(\cos h - 1) + \cos(x_0)\sin h}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \sin(x_0)\frac{-2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{h} + \cos(x_0)\frac{\sin h}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} -\sin(x_0)\sin\left(\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} + \cos(x_0)\frac{\sin h}{h} =$$
$$= -\sin(x_0)\cdot 0\cdot 1 + \cos(x_0)\cdot 1 = \cos(x_0).$$

Tehát $(\sin x)' = \cos x$.

Néhány derivált

$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{(\cos x)^2}$$

$$(c)' = 0$$
$$(x)' = 1$$
$$\left(x^2\right)' = 2x$$
$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(e^x)' = e^x$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Egyoldali deriváltak

Jobb oldali derivált x_0-ban: $\lim\limits_{h \to 0+} F_{x_0}(h)$.

Bal oldali derivált x_0-ban: $\lim\limits_{h \to 0-} F_{x_0}(h)$.

Példa: $f(x) = |x|$.

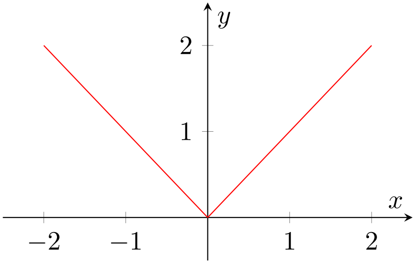
Differenciahányadosa $x_0 = 0$-ban:

$$F_0(h) = \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1, & \text{ha } h > 0 \\ -1, & \text{ha } h < 0 \end{cases}$$

Ennek $h = 0$-ban nincs határértéke,
de van jobb és bal oldali határérték:

$$\lim_{h \to 0+} F_0(h) = 1$$

$$\lim_{h \to 0-} F_0(h) = -1$$



Egy tétel

Tétel

Ha egy függvény egy x_0 pontban differenciálható, akkor az x_0 pontban folytonos a függvény.

Visszafelé nem igaz, pl. az abszolútérték függvény a 0-ban.

Érintő

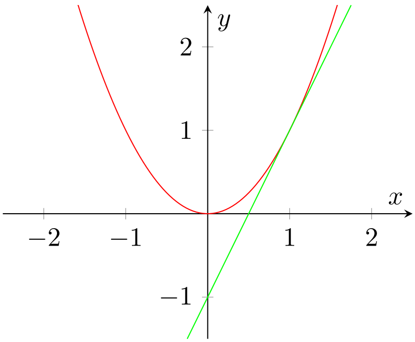
Az f függvény grafikonjának érintője az x_0 pontban az $(x_0, f(x_0))$ ponton átmenő, $f'(x_0)$ meredekségű egyenes, azaz

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Példa:
Írjuk fel az $f(x) = x^2$ függvény érintőjét az $x_0 = 1$ pontban.

$f'(x) = 2x$, így $f'(1) = 2$.
Másrészt $f(1) = 1$, így

$$y = 1 + 2(x - 1) \text{ azaz}$$
$$y = 2x - 1$$



Feladat

Írjuk fel az $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ függvény érintőjét az $x_0 = 0$ pontban.

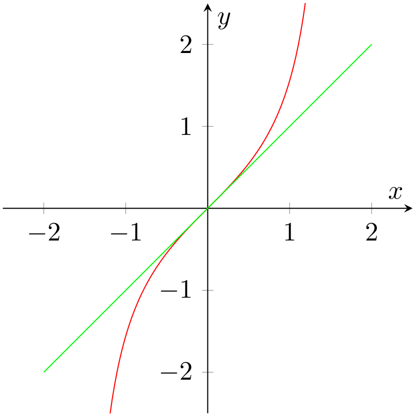
Feladat

Írjuk fel az $f(x) = \mathrm{tg}\,(x)$ függvény érintőjét az $x_0 = 0$ pontban.

$f'(x) = \dfrac{1}{(\cos x)^2}$, így $f'(0) = 1$.

Másrészt $f(0) = 0$, így

$$y = 0 + 1(x - 0) \text{ azaz}$$
$$y = x.$$



Lineáris átfogalmazás

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ $((x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq D_f \subseteq \mathbb{R})$ függvény az x_0 pontban differenciálható, ha van olyan $A \in \mathbb{R}$ szám és egy $\varepsilon(x)$ függvény, melyre igaz, hogy

$$f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + \varepsilon(x - x_0) \cdot (x - x_0),$$

ahol $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.
A derivált értéke ekkor az A szám.

Tehát a függvény:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)}_{\text{érintő}} + \underbrace{\varepsilon(x - x_0) \cdot (x - x_0)}_{\text{hibatag}}.$$