9. előadás

A derivált kiszámítása

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2023. október 4.

Műveleti tulajdonságok

Tétel:
Ha az f és g függvények deriválhatóak egy x pontban, akkor

cf is deriválható ($c \in \mathbb{R}$), és $(cf)'(x) = cf'(x)$;

$f+g$ is deriválható, és $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$;

$f-g$ is deriválható, és $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$;

fg is deriválható, és $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (Leibniz-szabály);

$\frac{f}{g}$ is deriválható (ha $g(x) \neq 0$), és $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Példák:
x^3 deriváltja:

$$\left(x^3\right)' = \left(x \cdot x^2\right)' = x' \cdot x^2 + x \cdot \left(x^2\right)' = 1 \cdot x^2 + x \cdot 2x = 3x^2$$

tangens deriváltja:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Nevezetes függvények deriváltjai

$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{(\cos x)^2}$$

$$(c)' = 0$$
$$(x)' = 1$$
$$\left(x^2\right)' = 2x$$
$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(e^x)' = e^x$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Feladatok

$$\left(x^3 + 3x^2 - 7x + 3\right)'$$

Feladatok

$$\left(x^3 + 3x^2 - 7x + 3\right)' = 3x^2 + 3 \cdot 2x - 7 \cdot 1 + 0 = 3x^2 + 6x - 7$$

Feladatok

$$\left(x^3 + 3x^2 - 7x + 3\right)' = 3x^2 + 3 \cdot 2x - 7 \cdot 1 + 0 = 3x^2 + 6x - 7$$

$$\left(x\sqrt{x}\right)'$$

Feladatok

$$\left(x^3+3x^2-7x+3\right)' = 3x^2+3\cdot 2x-7\cdot 1+0 = 3x^2+6x-7$$

$$\left(x\sqrt{x}\right)' = \left(x^{3/2}\right)' = \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

Feladatok

$$\left(x^3+3x^2-7x+3\right)' = 3x^2+3\cdot 2x-7\cdot 1+0 = 3x^2+6x-7$$

$$\left(x\sqrt{x}\right)' = \left(x^{3/2}\right)' = \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

$(x\sin x)'$

Feladatok

$$\left(x^3 + 3x^2 - 7x + 3\right)' = 3x^2 + 3 \cdot 2x - 7 \cdot 1 + 0 = 3x^2 + 6x - 7$$

$$\left(x\sqrt{x}\right)' = \left(x^{3/2}\right)' = \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

$$(x \sin x)' = x' \cdot \sin x + x \cdot (\sin x)' = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x = \sin x + x \cos x$$

Feladatok

$$\left(x^3+3x^2-7x+3\right)' = 3x^2+3\cdot 2x-7\cdot 1+0 = 3x^2+6x-7$$

$$\left(x\sqrt{x}\right)' = \left(x^{3/2}\right)' = \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

$$(x\sin x)' = x'\cdot\sin x + x\cdot(\sin x)' = 1\cdot\sin x + x\cdot\cos x = \sin x + x\cos x$$

$$\left(\frac{\cos x}{x^2}\right)'$$

Feladatok

$$\left(x^3 + 3x^2 - 7x + 3\right)' = 3x^2 + 3 \cdot 2x - 7 \cdot 1 + 0 = 3x^2 + 6x - 7$$

$$\left(x\sqrt{x}\right)' = \left(x^{3/2}\right)' = \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

$$(x \sin x)' = x' \cdot \sin x + x \cdot (\sin x)' = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x = \sin x + x \cos x$$

$$\left(\frac{\cos x}{x^2}\right)' = \frac{(-\sin x) \cdot x^2 - (\cos x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-x \sin x - 2\cos x}{x^3}$$

Feladatok

$$\left(x^3 + 3x^2 - 7x + 3\right)' = 3x^2 + 3 \cdot 2x - 7 \cdot 1 + 0 = 3x^2 + 6x - 7$$

$$\left(x\sqrt{x}\right)' = \left(x^{3/2}\right)' = \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

$$(x \sin x)' = x' \cdot \sin x + x \cdot (\sin x)' = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x = \sin x + x \cos x$$

$$\left(\frac{\cos x}{x^2}\right)' = \frac{(-\sin x) \cdot x^2 - (\cos x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-x \sin x - 2 \cos x}{x^3}$$

$$(\operatorname{ctg} x)'$$

Feladatok

$$\left(x^3+3x^2-7x+3\right)' = 3x^2+3\cdot 2x-7\cdot 1+0 = 3x^2+6x-7$$

$$\left(x\sqrt{x}\right)' = \left(x^{3/2}\right)' = \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

$$(x\sin x)' = x'\cdot\sin x + x\cdot(\sin x)' = 1\cdot\sin x + x\cdot\cos x = \sin x + x\cos x$$

$$\left(\frac{\cos x}{x^2}\right)' = \frac{(-\sin x)\cdot x^2-(\cos x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{-x\sin x-2\cos x}{x^3}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(-\sin x)\cdot\sin x-\cos x\cdot\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Inverz függvény deriválása

Tétel:
Ha az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény az $x \in D_f$ pont környezetében szigorúan monoton és $f'(x) \neq 0$, akkor f^{-1} differenciálható $y = f(x)$-ben, és

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Példák:
$f(x) = e^x$ esetén $f^{-1}(x) = \ln x$

$$(\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

$f(x) = \sin x$ ($x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ esetén) $f^{-1}(x) = \arcsin x$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

mivel $\cos x \geq 0$, ha $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Hasonlóan $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ és $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Összetett függvények deriválása (láncszabály)

Tétel:
Ha a g függvény differenciálható az x helyen, és az f függvény differenciálható a $g(x)$ helyen, akkor az $f \circ g$ függvény is differenciálható az x helyen, és

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Példák:

$$(\ln(\cos x))' = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\operatorname{tg} x$$

$$\left(e^{-x}\right)' = e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x}$$

Hiperbolikus függvények deriváltjai:

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$$

Az a^x deriváltja ($a > 0$):

$$(a^x)' = \left(\left(e^{\ln a}\right)^x\right)' = \left(e^{x \ln a}\right)' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a$$

Feladatok

$$(\operatorname{sh}(7x+6))'$$

Feladatok

$$(\operatorname{sh}(7x+6))' = \operatorname{ch}(7x+6)\cdot 7 = 7\operatorname{ch}(7x+6)$$
$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$$

Feladatok

$$(\operatorname{sh}(7x+6))' = \operatorname{ch}(7x+6)\cdot 7 = 7\operatorname{ch}(7x+6)$$
$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$$

$$\left((x+2)^2\right)'$$

Feladatok

$$(\operatorname{sh}(7x+6))' = \operatorname{ch}(7x+6)\cdot 7 = 7\operatorname{ch}(7x+6)$$
$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$$

$$\left((x+2)^2\right)' = 2(x+2)\cdot 1 = 2x+4$$
$$(x+2)^2 = x^2+4x+4$$

Feladatok

$$(\operatorname{sh}(7x+6))' = \operatorname{ch}(7x+6)\cdot 7 = 7\operatorname{ch}(7x+6)$$
$$(\operatorname{sh}x)' = \operatorname{ch}x$$

$$\left((x+2)^2\right)' = 2(x+2)\cdot 1 = 2x+4$$
$$(x+2)^2 = x^2+4x+4$$

$$\left(3^{2-x}\right)'$$

Feladatok

$$(\operatorname{sh}(7x+6))' = \operatorname{ch}(7x+6)\cdot 7 = 7\operatorname{ch}(7x+6)$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$$

$$\left((x+2)^2\right)' = 2(x+2)\cdot 1 = 2x+4$$

$$(x+2)^2 = x^2+4x+4$$

$$\left(3^{2-x}\right)' = 3^{2-x}\ln 3\cdot(-1) = -3^{2-x}\ln 3$$

$$(3^x)' = 3^x\ln 3$$

Feladatok

$$(\operatorname{sh}(7x+6))' = \operatorname{ch}(7x+6)\cdot 7 = 7\operatorname{ch}(7x+6)$$
$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$$

$$\left((x+2)^2\right)' = 2(x+2)\cdot 1 = 2x+4$$
$$(x+2)^2 = x^2+4x+4$$

$$\left(3^{2-x}\right)' = 3^{2-x}\ln 3\cdot(-1) = -3^{2-x}\ln 3$$
$$(3^x)' = 3^x\ln 3$$

$$\left(e^{\sin^2 x}\right)'$$

Feladatok

$$(\operatorname{sh}(7x+6))' = \operatorname{ch}(7x+6)\cdot 7 = 7\operatorname{ch}(7x+6)$$
$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$$

$$\left((x+2)^2\right)' = 2(x+2)\cdot 1 = 2x+4$$
$$(x+2)^2 = x^2+4x+4$$

$$\left(3^{2-x}\right)' = 3^{2-x}\ln 3\cdot(-1) = -3^{2-x}\ln 3$$
$$(3^x)' = 3^x\ln 3$$

$$\left(e^{\sin^2 x}\right)' = e^{\sin^2 x}\cdot 2\sin x\cos x$$
$$\left(\sin^2 x\right)' = 2\sin x\cos x$$