# Matematika A1a - Analízis elméleti tudásanyag a vizsgára

## BME GTK műszaki menedzser szak, 2023. ősz

**Polinom**
Az $x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ hozzárendelést polinomnak nevezzük ($a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$). Az $a_n$ a főegyüttható, $a_0$ a konstanstag.

**(Kis-)Bézout-tétel**
Ha $x_0 \in \mathbb{R}$ gyöke egy $p(x)$ polinomnak, akkor az kiemelhető, azaz létezik olyan $q(x)$ polinom, hogy $p(x) = (x - x_0)q(x)$.

**Polinom gyökének multiplicitása**
A $p(x)$ polinom $x_0$ gyökének multiplicitása $m$, ha $(x - x_0)^m$ kiemelhető $p$-ből, de $(x - x_0)^{m+1}$ nem.

**Egészegyütthatós polinom racionális gyökei**
Az $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ egészegyütthatós polinomnak ($a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$) csak olyan $\frac{p}{q}$ racionális gyöke van (ahol $p$ és $q$ relatív prím), melyre $p$ osztja $a_0$-t és $q$ osztja $a_n$-et.

**Függvény értelmezési tartománya**
Az $f\colon A \to \mathbb{R}$ függvény ($A \subseteq \mathbb{R}$) értelmezési tartománya az $A$ halmaz, melyet $D_f$-fel szoktunk jelölni.

**Függvény értékkészlete**
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) értékkészlete azon valós számok halmaza, melyet a függvény felvesz. Jelölés: $R_f$. Azaz $R_f = \{f(x) \mid x \in D_f\}$.

**Monoton növő függvény**
Egy $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) monoton nő, ha $x_1 < x_2$ ($x_1, x_2 \in D_f$) esetén $f(x_1) \le f(x_2)$.

**Szigorúan monoton növő függvény**
Egy $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) szigorúan monoton nő, ha $x_1 < x_2$ ($x_1, x_2 \in D_f$) esetén $f(x_1) < f(x_2)$.

**Monoton csökkenő függvény**
Egy $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) monoton csökken, ha $x_1 < x_2$ ($x_1, x_2 \in D_f$) esetén $f(x_1) \ge f(x_2)$.

**Szigorúan monoton csökkenő függvény**
Egy $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) szigorúan monoton csökken, ha $x_1 < x_2$ ($x_1, x_2 \in D_f$) esetén $f(x_1) > f(x_2)$.

**Alulról korlátos függvény**
Egy $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) alulról korlátos, ha létezik $k \in \mathbb{R}$ valós szám, hogy $f(x) \ge k$ minden $x \in D_f$ esetén.

**Felülről korlátos függvény**
Egy $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) felülről korlátos, ha létezik $K \in \mathbb{R}$ valós szám, hogy $f(x) \le K$ minden $x \in D_f$ esetén.

**Korlátos függvény**
Egy $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) korlátos, ha alulról és felülről is korlátos, azaz léteznek $k, K \in \mathbb{R}$ valós számok, hogy $k \le f(x) \le K$ minden $x \in D_f$ esetén. Ezt úgy is mondhatjuk, hogy létezik $K \in \mathbb{R}$ valós szám, hogy $|f(x)| \le K$ minden $x \in D_f$ esetén.

**Periodikus függvény**
Egy $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) periodikus, ha van olyan $d \in \mathbb{R}$ nemnulla szám, hogy $x \in D_f$ esetén $x \pm d \in D_f$ és $f(x) = f(x \pm d)$.

**Páros függvény**
Egy $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) páros, ha $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$ és $f(-x) = f(x)$.

**Páratlan függvény**
Egy $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) páratlan, ha $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$ és $f(-x) = -f(x)$.

**Invertálható függvény**
Egy $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) invertálható, ha az értékkészletének minden elemét egyszer veszi fel, azaz $f(x_1) = f(x_2)$ esetén $x_1 = x_2$.

**Inverz függvény**
Egy $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ invertálható függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) inverze az az $f^{-1}\colon R_f \to D_f$ függvény, melyre $f^{-1}(f(x)) = x$ minden $x \in D_f$-re.

**Valós számsorozat tulajdonságai**
- alulról korlátos, ha létezik $k \in \mathbb{R}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \geq k$
- felülről korlátos, ha létezik $K \in \mathbb{R}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq K$
- korlátos, ha létezik $K \in \mathbb{R}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|a_n| \leq K$
- monoton nő, ha $n < m$ esetén $a_n \leq a_m$
- szigorúan monoton nő, ha $n < m$ esetén $a_n < a_m$
- monoton csökken, ha $n < m$ esetén $a_n \geq a_m$
- szigorúan monoton csökken, ha $n < m$ esetén $a_n > a_m$

**Valós számsorozat véges határértéke**
Az $(a_n)$ sorozat határértéke az $A \in \mathbb{R}$ szám, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $n > N$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$. Jelölés: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. Ekkor a sorozat konvergens, minden más esetben divergens. Ha $A = 0$, akkor az $(a_n)$ sorozatot nullsorozatnak nevezzük.

**Valós számsorozat végtelen határértéke**
Ha az $(a_n)$ sorozathoz minden $K \in \mathbb{R}$ számhoz létezik $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $n > N$ esetén $K < a_n$, akkor az $(a_n)$ sorozat a végtelenbe tart, ezt így jelöljük: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

**Valós számsorozat mínusz végtelen határértéke**
Ha az $(a_n)$ sorozathoz minden $K \in \mathbb{R}$ számhoz létezik $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $n > N$ esetén $a_n < K$, akkor az $(a_n)$ sorozat a mínusz végtelenbe tart, ezt így jelöljük: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

**Rendőr-elv**
Ha az $(a_n)$, $(b_n)$, $(c_n)$ sorozatokra fennáll, hogy $a_n \leq b_n \leq c_n$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén (esetleg csak $n > N$ esetén), és az $(a_n)$ és $(c_n)$ sorozatok határértéke ugyanaz az $A$ szám, akkor a $(b_n)$ sorozat határértéke is $A$.

**Valós függvény véges határértéke véges pontban**
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) határértéke az $x_0$ pontban $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$. Jelölése: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

**Valós függvény végtelen határértéke véges pontban**
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) határértéke az $x_0$ pontban $+\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez létezik $\delta > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $K < f(x)$. Jelölése: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.

**Valós függvény végtelen határértéke véges pontban**
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) határértéke az $x_0$ pontban $-\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez létezik $\delta > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $f(x) < K$. Jelölése: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

**Valós függvény véges határértéke a $+\infty$-ben**
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) határértéke a $+\infty$-ben $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $L \in \mathbb{R}$, hogy $L < x$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$. Jelölése: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

**Valós függvény végtelen határértéke a $+\infty$-ben**
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) határértéke a $+\infty$-ben $+\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez létezik $L \in \mathbb{R}$, hogy $L < x$ esetén $x \in D_f$ és $K < f(x)$. Jelölése: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

**Valós függvény végtelen határértéke a $+\infty$-ben**
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) határértéke a $+\infty$-ben $-\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez létezik $L \in \mathbb{R}$, hogy $L < x$ esetén $x \in D_f$ és $f(x) < K$. Jelölése: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

**Valós függvény véges határértéke a $-\infty$-ben**
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) határértéke a $-\infty$-ben $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $L \in \mathbb{R}$, hogy $x < L$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$. Jelölése: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$.

**Valós függvény végtelen határértéke a $-\infty$-ben**
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) határértéke a $-\infty$-ben $+\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez létezik $L \in \mathbb{R}$, hogy $x < L$ esetén $x \in D_f$ és $K < f(x)$. Jelölése: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

**Valós függvény végtelen határértéke a $-\infty$-ben**
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) határértéke a $-\infty$-ben $-\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez létezik $L \in \mathbb{R}$, hogy $x < L$ esetén $x \in D_f$ és $f(x) < K$. Jelölése: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

**Valós függvény véges jobb oldali határértéke**
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) jobb oldali határértéke az $x_0$ pontban $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy $0 < x - x_0 < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$. Jelölése: $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = A$.

**Valós függvény végtelen jobb oldali határértéke**
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) jobb oldali határértéke az $x_0$ pontban $+\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez létezik $\delta > 0$, hogy $0 < x - x_0 < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $K < f(x)$. Jelölése: $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = +\infty$.

**Valós függvény végtelen jobb oldali határértéke**
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) jobb oldali határértéke az $x_0$ pontban $-\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez létezik $\delta > 0$, hogy $0 < x - x_0 < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $f(x) < K$. Jelölése: $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = -\infty$.

**Valós függvény véges bal oldali határértéke**
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) bal oldali határértéke az $x_0$ pontban $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy $0 < x_0 - x < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$. Jelölése: $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = A$.

**Valós függvény végtelen bal oldali határértéke**
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) bal oldali határértéke az $x_0$ pontban $+\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez létezik $\delta > 0$, hogy $0 < x_0 - x < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $K < f(x)$. Jelölése: $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = +\infty$.

**Valós függvény végtelen bal oldali határértéke**
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) bal oldali határértéke az $x_0$ pontban $-\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez létezik $\delta > 0$, hogy $0 < x_0 - x < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $f(x) < K$. Jelölése: $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = -\infty$.

**Átviteli elv**
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvénynek a határértéke az $x_0 \in D_f$ helyen pontosan akkor $A$, ha minden $x_0$-hoz tartó $(x_n)$ sorozatra ($x_n \neq x_0$) az $(f(x_n))$ sorozat határértéke $A$.

**Valós függvény folytonossága egy pontban**
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) folytonos az $x_0 \in D_f$ pontban, ha $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Azaz minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy $|x - x_0| < \delta$ esetén $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

**Valós függvény folytonossága**
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) folytonos, ha minden $x_0 \in D_f$ pontban folytonos.

**Szakadási hely**
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvénynek ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $x_0 \in D_f$ pont szakadási helye, ha a függvény $x_0$-ban nem folytonos.

**Megszüntethető szakadási hely**
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvénynek ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $x_0 \in D_f$ szakadási helye megszüntethető, ha van olyan $A$ szám, hogy a függvény értékét $x_0$-ban $A$-ra változtatva, az így kapott függvény folytonos $x_0$-ban.

**Ugrás/elsőfajú szakadási hely**
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvénynek ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $x_0 \in D_f$ szakadási helye ugráshely, ha létezik és véges az $x_0$-beli jobb és bal oldali határérték, de nem egyenlőek.

**Szinguláris/másodfajú szakadási hely**
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvénynek ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $x_0 \in D_f$ szakadási helye szinguláris, ha az $x_0$-beli jobb vagy bal oldali határértéknek legalább egyike nem létezik vagy végtelen.

**Weierstrass-tétel**
Ha $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor van olyan $\alpha, \beta \in [a,b]$, melyekre $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$ minden $x \in [a,b]$-re.

**Bolzano-tétel**
Ha $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor $f$ felvesz minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket.

**Valós függvény differenciálhatósága egy pontban**
Egy $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $x_0 \in D_f$ pontban differenciálható, ha létezik és véges a

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

határérték.

**Valós függvény differenciálhatósága**
Egy $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) differenciálható, ha minden $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban differenciálható.

**Derivált függvény**
Egy $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) derivált függvénye az a függvény, mely minden $x_0 \in D_f$ ponthoz hozzárendeli az

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

határértéket.

**Inverz függvény differenciálási szabálya**
Ha az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) szigorúan monoton nő és folytonos $x_0 \in D_f$ egy környezetében, továbbá $x_0$-ban differenciálható és $f'(x_0) \neq 0$, akkor az $f^{-1}$ inverz függvény differenciálható $f(x_0)$-ban, és ${f^{-1}}'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

**Összetett függvény differenciálási szabálya**
Ha az $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények, $g$ differenciálható az $x_0$ pontban, $f$ differenciálható a $g(x_0)$ pontban, akkor az $f \circ g$ függvény differenciálható az $x_0$ pontban, és $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$.

**Taylor-polinom**
Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény $x_0 \in \mathbb{R}$ körüli $n$-edfokú Taylor-polinomja a következő:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

**Lokális minimum**
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvénynek ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $x_0 \in D_f$ pontban lokális minimuma van, ha van olyan $\delta > 0$, hogy $|x - x_0| < \delta$ esetén $f(x) \geq f(x_0)$.

**Lokális maximum**
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvénynek ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $x_0 \in D_f$ pontban lokális maximuma van, ha van olyan $\delta > 0$, hogy $|x - x_0| < \delta$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$.

**Abszolút minimum**
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvénynek ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $x_0 \in D_f$ pontban abszolút minimuma van, ha minden $x \in D_f$ esetén $f(x) \geq f(x_0)$.

**Abszolút maximum**
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvénynek ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $x_0 \in D_f$ pontban abszolút maximuma van, ha minden $x \in D_f$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$.

**Lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele**
Ha az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvénynek ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $x_0 \in D_f$ pontban lokális szélsőértéke (minimuma vagy maximuma) van és ebben a pontban differenciálható, akkor $f'(x_0) = 0$.

**Lokális szélsőérték létezésének elsőrendű elégséges feltétele**
Ha az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényre ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) $f'(x_0) = 0$, és $x_0$-ban előjelet vált a derivált függvény, akkor a függvénynek $x_0$-ban lokális szélsőértéke van.

**Lokális maximum létezésének másodrendű elégséges feltétele**
Ha az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvényre ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) < 0$, akkor a függvénynek $x_0$-ban lokális maximuma van.

**Lokális minimum létezésének másodrendű elégséges feltétele**
Ha az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvényre ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) > 0$, akkor a függvénynek $x_0$-ban lokális minimuma van.

**Rolle-tétel**
Ha az $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény az $[a, b]$-n folytonos, $(a, b)$-n differenciálható és $f(a) = f(b)$, akkor van olyan $x \in (a, b)$ belső pont, amire $f'(x) = 0$.

**Lagrange-féle középértéktétel**
Ha az $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény az $[a, b]$-n folytonos, $(a, b)$-n differenciálható, akkor van olyan $x \in (a, b)$ belső pont, amire

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

**Cauchy-féle középértéktétel**
Ha $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ függvények az $[a, b]$-n folytonosak, $(a, b)$-n differenciálhatóak, a $g$ deriváltja az $(a, b)$-n sehol sem 0, akkor van olyan $x \in (a, b)$ belső pont, amire

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

**Valós függvény konvexitása**
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $I \subseteq D_f$ intervallumon konvex, ha az $I$ intervallumon a függvény grafikonja feletti tartomány konvex. Ha a függvény differenciálható, akkor ez ekvivalens azzal, hogy a grafikon az érintőegyenes felett halad, azaz $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ minden $x, x_0 \in I$ esetén.

**Valós függvény konkávitása**
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $I \subseteq D_f$ intervallumon konkáv, ha az $I$ intervallumon a függvény grafikonja alatti tartomány konvex. Ha a függvény differenciálható, akkor ez ekvivalens azzal, hogy a grafikon az érintőegyenes alatt halad, azaz $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ minden $x, x_0 \in I$ esetén.

**Inflexiós pont**
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvénynek ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $x_0 \in D_f$ pontban inflexiós pontja van, ha $x_0$-ban differenciálható, és itt a függvény konvexitást vált, azaz a függvény előtte konvex és utána konkáv vagy fordítva.

**Bernoulli–L'Hospital-szabály**
Tegyük fel, hogy az $f(x), g(x)$ differenciálható függvények értelmezettek az $x_0$ pont egy környezetében, esetleg az $x_0$-ban nem. Ekkor ha $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ vagy $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$, és ha $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ létezik, akkor

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Hasonló állítás igaz, ha $x_0 = \pm\infty$, illetve bal és jobb oldali határértékekre is.

**Primitív függvény**
Az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény ($I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum) primitív függvénye $F\colon I \to \mathbb{R}$, ha $F$ differenciálható $I$-n, és $F'(x) = f(x)$ minden $x \in I$ esetén.

**Határozatlan integrál**
Az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény ($I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum) határozatlan integrálja az összes primitív függvényének halmaza. Jelölés: $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

**Parciális integrálás elve**
Ha $f$ és $g$ differenciálható függvények az $I$ intervallumon, itt $f'g$ primitív függvénye létezik, akkor $fg'$ primitív függvénye is létezik, és

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

**Newton–Leibniz-szabály**
Ha $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény integrálható $[a,b]$-n, és $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ primitív függvénye $f$-nek az $(a,b)$-n (azaz $F$ differenciálható $(a,b)$-n, és itt $F'(x) = f(x)$), továbbá $F$ folytonos $[a,b]$-n, akkor

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

**Görbe ívhossza**
Az $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény grafikonjának az ívhossza $\displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$.

**Forgástest térfogata**
Az $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}_+$ függvény grafikonját az $x$ tengely körül megforgatva kapott forgástest térfogata

$$\pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

**Forgástest palást felszíne**
Az $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény grafikonját az $x$ tengely körül megforgatva kapott forgástest palástjának felszíne

$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$