

# 10. gyakorlat

## Határozatlan integrálok

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,  
Algebra és Geometria Tanszék

2023. november 23.

## 1. feladat (a)

Keressük meg azt az  $f$  függvényt, amelyre  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  és  $f(4) = 1$  teljesül.

## 1. feladat (a)

Keressük meg azt az  $f$  függvényt, amelyre  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  és  $f(4) = 1$  teljesül.

A derivált függvényből  $f(x) = \sqrt{x} + C$ , mert  
 $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

Másrészt  $1 = f(4) = \sqrt{4} + C = 2 + C$ , azaz  $C = -1$ .

Így  $f(x) = \sqrt{x} - 1$ .

## 1. feladat (b)

Keressük meg azt az  $f$  függvényt, amelyre  $f''(x) = 3e^x + 5 \sin x$  és  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = 2$  teljesül.

## 1. feladat (b)

Keressük meg azt az  $f$  függvényt, amelyre  $f''(x) = 3e^x + 5 \sin x$  és  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = 2$  teljesül.

Először a függvény derivált függvényét határozzuk meg, melynek ismerjük a deriváltját ( $f''(x)$ -et). Így

$$f'(x) = 3e^x - 5 \cos x + C_1,$$

továbbá

$$2 = f'(0) = 3e^0 - 5 \cos(0) + C_1 = 3 - 5 + C_1 = -2 + C_1,$$

amiből  $C_1 = 4$ . Tehát

$$f'(x) = 3e^x - 5 \cos x + 4.$$

Innen a függvényt hasonlóan meghatározhatjuk:

$$f(x) = 3e^x - 5 \sin x + 4x + C_2,$$

és így  $1 = f(0) = 3 - 0 + 0 + C_2$ , azaz  $C_2 = -2$ , azaz

$$f(x) = 3e^x - 5 \sin x + 4x - 2.$$

## 2. feladat (a)

Számítsuk ki a  $\int x^2 + 2x - 3 \, dx$  határozatlan integrált.

## 2. feladat (a)

Számítsuk ki a  $\int x^2 + 2x - 3 dx$  határozatlan integrált.

Tulajdonképpen az a kérdés, hogy melyik függvényt deriválva kapjuk ezt a polinomot. Könnyen kitalálhatjuk:

$$\int x^2 + 2x - 3 dx = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + C$$

## 2. feladat (b)

Számítsuk ki a  $\int \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} dx$  határozatlan integrált.



## 2. feladat (b)

Számítsuk ki a  $\int \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} \, dx$  határozatlan integrált.

Az integrál linearitása mellett azt használjuk, hogy

$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$  tetszőleges  $n \neq -1$ -re (nemcsak az egészekre).

$$\int \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} \, dx = \int x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} \, dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$$

## 2. feladat (c)

Számítsuk ki a  $\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} dx$  határozatlan integrált.

## 2. feladat (c)

Számítsuk ki a  $\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} dx$  határozatlan integrált.

$$\begin{aligned}\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} dx &= \int \frac{x^2 + 2x + 1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} dx = \\ &= \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + 2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C\end{aligned}$$

### 3. feladat (a)

Lineáris helyettesítéssel számoljuk ki a  $\int (x + 4)^3 dx$  határozatlan integrált.

### 3. feladat (a)

Lineáris helyettesítéssel számoljuk ki a  $\int (x + 4)^3 dx$  határozatlan integrált.

Lineáris helyettesítés:

Ha az  $f(x)$  függvény primitív függvénye  $F(x)$ , akkor

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$$

Mivel  $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$ , és  $a = 1, b = 4$ , így

$$\int (x + 4)^3 dx = \frac{(x + 4)^4}{4} + C$$

### 3. feladat (b)

Lineáris helyettesítéssel számoljuk ki a  $\int e^{5x} dx$  határozatlan integrált.

### 3. feladat (b)

Lineáris helyettesítéssel számoljuk ki a  $\int e^{5x} dx$  határozatlan integrált.

Lineáris helyettesítés:

Ha az  $f(x)$  függvény primitív függvénye  $F(x)$ , akkor

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$$

Most  $a = 5, b = 0$ , és az  $e^x$  függvény primitív függvénye önmaga, így

$$\int e^{5x} dx = \frac{1}{5} e^{5x} + C$$

### 3. feladat (c)

Lineáris helyettesítéssel számoljuk ki a  $\int \frac{1}{3x-6} dx$  határozatlan integrált.



### 3. feladat (c)

Lineáris helyettesítéssel számoljuk ki a  $\int \frac{1}{3x-6} dx$  határozatlan integrált.

Lineáris helyettesítés:

Ha az  $f(x)$  függvény primitív függvénye  $F(x)$ , akkor

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$$

Most  $a=3, b=6$ , és  $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ , így

$$\int \frac{1}{3x-6} dx = \frac{1}{3} \ln|3x-6| + C$$

Másik lehetőség:

$$\int \frac{1}{3x-6} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-2} dx = \frac{1}{3} \ln|x-2| + C$$

A két logaritmus csak konstansban ( $\ln 3$ ) tér el.

## 4. feladat (a)

Határozzuk meg a  $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x} + 5} dx$  határozatlan integrált.

## 4. feladat (a)

Határozzuk meg a  $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x} + 5} dx$  határozatlan integrált.

Ennél a feladatnál a  $\int f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x)) + C$  szabályt alkalmazzuk.

Mivel  $(e^{3x} + 5)' = 3e^{3x}$ , így  $g(x) = e^{3x} + 5$  függvényt választva alkalmazhatjuk a szabályt, ha 3-mal bővítünk:

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{3x} + 5} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{e^{3x} + 5} 3e^{3x} dx = \frac{1}{3} \ln(e^{3x} + 5) + C$$

## 4. feladat (b)

Határozzuk meg a  $\int x^3(4x^4 + 6)^{2023} dx$  határozatlan integrált.

## 4. feladat (b)

Határozzuk meg a  $\int x^3(4x^4 + 6)^{2023} dx$  határozatlan integrált.

Ennél a feladatnál is a  $\int f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x)) + C$  szabályt alkalmazzuk.

Itt  $g(x) = 4x^4 + 6$ , melynek deriváltja:  $g'(x) = 4 \cdot 4x^3 = 16x^3$ , így 16-tal bővítünk:

$$\begin{aligned}\int x^3(4x^4 + 6)^{2023} dx &= \frac{1}{16} \int 16x^3(4x^4 + 6)^{2023} dx = \\ &= \frac{1}{16} \frac{(4x^4 + 6)^{2024}}{2024} + C = \\ &= \frac{(4x^4 + 6)^{2024}}{32384} + C\end{aligned}$$

#### 4. feladat (c)

Határozzuk meg a  $\int \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{(\operatorname{tg} x)^3}} dx$  határozatlan integrált.

## 4. feladat (c)

Határozzuk meg a  $\int \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{(\operatorname{tg} x)^3}} dx$  határozatlan integrált.

Ennél a feladatnál is a  $\int f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x)) + C$  szabályt alkalmazzuk.

Mivel  $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ , így a tangens a belső függvény:

$$\int \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{(\operatorname{tg} x)^3}} dx = \int (\operatorname{tg} x)' (\operatorname{tg} x)^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{(\operatorname{tg} x)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = -\frac{2}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} + C$$

## 5. feladat (a)

Határozzuk meg a  $\int \frac{x^2 + x - 2}{x - 3} dx$  határozatlan integrált.



## 5. feladat (a)

Határozzuk meg a  $\int \frac{x^2 + x - 2}{x - 3} dx$  határozatlan integrált.

Mivel a számlálóban magasabb fokú polinom áll, mint a nevezőben, így polinomosztást végzünk:

$$x^2 + x - 2 = (x - 3)(x + 4) + 10$$

Így:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + x - 2}{x - 3} dx &= \int \frac{(x - 3)(x + 4) + 10}{x - 3} dx = \int x + 4 + \frac{10}{x - 3} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} + 4x + 10 \ln |x - 3| + C \end{aligned}$$

## 5. feladat (b)

Határozzuk meg a  $\int \frac{x+2}{2x^2+5} dx$  határozatlan integrált.

## 5. feladat (b)

Határozzuk meg a  $\int \frac{x+2}{2x^2+5} dx$  határozatlan integrált.

Először szétszedjük két integrállá:

$$\int \frac{x+2}{2x^2+5} dx = \int \frac{x}{2x^2+5} dx + \int \frac{2}{2x^2+5} dx$$

Az elsőt az első helyettesítési szabállyal számoljuk ki:

$$\int \frac{x}{2x^2+5} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{2x^2+5} 4x dx = \frac{1}{4} \ln(2x^2+5) + C$$

A másodikhoz lineáris helyettesítést végzünk:

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{2x^2+5} dx &= \frac{2}{5} \int \frac{1}{\frac{2x^2}{5}+1} dx = \frac{2}{5} \int \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{2}{5}}x\right)^2+1} dx = \\ &= \frac{2}{5} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{5}}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{2}{5}}x \right) + C = \sqrt{\frac{2}{5}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{2}{5}}x \right) + C \end{aligned}$$

Tehát: 
$$\int \frac{x+2}{2x^2+5} dx = \frac{1}{4} \ln(2x^2+5) + \sqrt{\frac{2}{5}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{2}{5}}x \right) + C$$

## Opcionális feladat

$$\int \frac{2}{x^2 - 9} dx = ?$$

# Házi feladatok

1.  $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} dx = ?$
2. Melyik az az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, melyre  $f''(x) = \cos(3x)$  és  $f(0) = 1$  és  $f'(0) = 6$ ?
3. Melyik az az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, melyre  $f'(x) = 5xe^{5x^2}$  és  $f(0) = 1$ ?

## Házi feladatok megoldása

1.  $\frac{8}{15}x^{\frac{15}{8}} + C$  (felhasználva, hogy  $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} = x^{\frac{7}{8}}$ ).
2.  $f(x) = -\frac{\cos(3x)}{9} + 6x + \frac{10}{9}$ .
3.  $f(x) = \frac{1 + e^{5x^2}}{2}$ .