

11. gyakorlat

Határozatlan és határozott integrálok

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2023. november 30.

1. feladat (a)

A parciális integrálás szabályát alkalmazva számítsuk ki az $\int x e^{3x} dx$ határozatlan integrált.

1. feladat (a)

A parciális integrálás szabályát alkalmazva számítsuk ki az $\int x e^{3x} dx$ határozatlan integrált.

A parciális integrálás képlete szerint:

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

Itt $f(x) = x$, $g'(x) = e^{3x}$, amiből $f'(x) = 1$, $g(x) = \frac{e^{3x}}{3}$.

$$\int x e^{3x} dx = x \frac{e^{3x}}{3} - \int 1 \cdot \frac{e^{3x}}{3} dx = \frac{x e^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + C$$

1. feladat (b)

A parciális integrálás szabályát alkalmazva számítsuk ki az $\int x^2 \cos(5x) dx$ határozatlan integrált.

1. feladat (b)

A parciális integrálás szabályát alkalmazva számítsuk ki az $\int x^2 \cos(5x) dx$ határozatlan integrált.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 & f'(x) &= 2x \\ g'(x) &= \cos(5x) & g(x) &= \frac{\sin(5x)}{5} \end{aligned}$$

$$\int x^2 \cos(5x) dx = x^2 \frac{\sin(5x)}{5} - \int 2x \frac{\sin(5x)}{5} dx = \frac{x^2 \sin(5x)}{5} - \frac{2}{5} \int x \sin(5x) dx$$

Az utolsó integrál kiszámolásához újabb parciális integrálás:

$$\int x \sin(5x) dx = x \left(-\frac{\cos(5x)}{5} \right) - \int 1 \cdot \left(-\frac{\cos(5x)}{5} \right) dx = -\frac{x \cos(5x)}{5} + \frac{\sin(5x)}{25} + C$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x & f'(x) &= 1 \\ g'(x) &= \sin(5x) & g(x) &= -\frac{\cos(5x)}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos(5x) dx &= \frac{x^2 \sin(5x)}{5} - \frac{2}{5} \left(-\frac{x \cos(5x)}{5} + \frac{\sin(5x)}{25} \right) + C = \\ &= \frac{x^2 \sin(5x)}{5} + \frac{2x \cos(5x)}{25} - \frac{2 \sin(5x)}{125} + C \end{aligned}$$

1. feladat (c)

A parciális integrálás szabályát alkalmazva számítsuk ki az $\int \arcsin(3x) dx$ határozatlan integrált.

1. feladat (c)

A parciális integrálás szabályát alkalmazva számítsuk ki az $\int \arcsin(3x) dx$ határozatlan integrált.

Bár ez nem szorzat, mégis a parciális integrálást alkalmazzuk:

$$f(x) = \arcsin(3x) \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}} \cdot 3 = \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$$
$$g'(x) = 1 \quad g(x) = x$$

$$\int \arcsin(3x) dx = \int 1 \cdot \arcsin(3x) dx = x \arcsin(3x) - \int x \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}} dx$$

Az utolsó integrálnál az első helyettesítési szabályt alkalmazzuk:

$$\begin{aligned} \int x \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}} dx &= -\frac{3}{18} \int (1-9x^2)^{-\frac{1}{2}} (-18x) dx = -\frac{1}{6} \frac{(1-9x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \\ &= -\frac{\sqrt{1-9x^2}}{3} + C \end{aligned}$$

Tehát:

$$\int \arcsin(3x) dx = x \arcsin(3x) - \int x \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}} dx = x \arcsin(3x) + \frac{\sqrt{1-9x^2}}{3} + C$$

2. feladat (a)

Alkalmas helyettesítéssel számítsuk ki a $\int e^{\sqrt[3]{x}} dx$ határozatlan integrált.

2. feladat (a)

Alkalmas helyettesítéssel számítsuk ki a $\int e^{\sqrt[3]{x}} dx$ határozatlan integrált.

$u = \sqrt[3]{x}$ helyettesítéssel

$x = u^3$, így $\frac{dx}{du} = 3u^2$, azaz $dx = 3u^2 du$

$$\int e^{\sqrt[3]{x}} dx = \int e^u 3u^2 du = 3 \int u^2 e^u du$$

Az integrált parciális integrálással számolhatjuk ki: $f(u) = u^2$ $f'(u) = 2u$
 $g'(u) = e^u$ $g(u) = e^u$

$$\int u^2 e^u du = u^2 e^u - \int 2u e^u du$$

Egy újabb parciális integrálás:

$$\int u e^u du = u e^u - \int e^u du = u e^u - e^u + C$$

Tehát:

$$\begin{aligned} \int e^{\sqrt[3]{x}} dx &= 3 \int u^2 e^u du = 3 \left(u^2 e^u - \int 2u e^u du \right) = 3u^2 e^u - 6(u e^u - e^u) + C = \\ &= 3u^2 e^u - 6u e^u + 6e^u + C = 3\sqrt[3]{x^2} e^{\sqrt[3]{x}} - 6\sqrt[3]{x} e^{\sqrt[3]{x}} + 6e^{\sqrt[3]{x}} + C \end{aligned}$$

2. feladat (b)

Alkalmas helyettesítéssel számítsuk ki a $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$ határozatlan integrált.

2. feladat (b)

Alkalmas helyettesítéssel számítsuk ki a $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$ határozatlan integrált.

$u = e^x$ helyettesítéssel

$x = \ln u$, így $\frac{dx}{du} = \frac{1}{u}$, azaz $dx = \frac{1}{u} du$

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \int \frac{1}{u + \frac{1}{u}} \frac{1}{u} du = \int \frac{1}{u^2 + 1} du = \operatorname{arctg} u + C = \operatorname{arctg}(e^x) + C$$

2. feladat (c)

Alkalmas helyettesítéssel számítsuk ki a $\int x\sqrt{5+x} dx$ határozatlan integrált.

2. feladat (c)

Alkalmas helyettesítéssel számítsuk ki a $\int x\sqrt{5+x} dx$ határozatlan integrált.

$u = \sqrt{5+x}$ helyettesítéssel

$x = u^2 - 5$, így $\frac{dx}{du} = 2u$, azaz $dx = 2u du$

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{5+x} dx &= \int (u^2 - 5)u \cdot 2u du = \int 2u^4 - 10u^2 du = \frac{2}{5}u^5 - \frac{10}{3}u^3 + C = \\ &= \frac{2}{5}\sqrt{5+x}^5 - \frac{10}{3}\sqrt{5+x}^3 + C = \frac{2}{5}(x+5)^{\frac{5}{2}} - \frac{10}{3}(x+5)^{\frac{3}{2}} + C\end{aligned}$$

Helyettesítés nélkül, parciális integrálással is ki lehet hozni:

$$f(x) = x \quad f'(x) = 1$$

$$g'(x) = \sqrt{5+x} \quad g(x) = \frac{2}{3}(5+x)^{\frac{3}{2}}$$

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{5+x} dx &= x \cdot \frac{2}{3}(5+x)^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2}{3}(5+x)^{\frac{3}{2}} dx = \\ &= \frac{2}{3}x(5+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}(5+x)^{\frac{5}{2}} + C = \\ &= \frac{2}{3}x(5+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(5+x)^{\frac{5}{2}} + C\end{aligned}$$

Némi átalakítás után látható, hogy a két eredmény azonos.

3. feladat (a)

Számítsuk ki a $\int_0^1 \sqrt{5x+4} dx$ határozott integrált.

3. feladat (a)

Számítsuk ki a $\int_0^1 \sqrt{5x+4} dx$ határozott integrált.

Newton–Leibniz-formula:

Ha az f függvény primitív függvénye az F , akkor

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

ahol a jobb oldalra az $[F(x)]_a^b$ jelölést is használjuk.

$$\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + C$$

és a lineáris helyettesítést használva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{5x+4} dx &= \left[\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} (5x+4)^{3/2} \right]_0^1 = \left[\frac{2(5x+4)^{3/2}}{15} \right]_0^1 = \\ &= \frac{2 \cdot 9^{3/2}}{15} - \frac{2 \cdot 4^{3/2}}{15} = \frac{2 \cdot 27 - 2 \cdot 8}{15} = \frac{38}{15}. \end{aligned}$$

3. feladat (b)

Számítsuk ki a $\int_1^3 x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx$ határozott integrált.

3. feladat (b)

Számítsuk ki a $\int_1^3 x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx$ határozott integrált.

Mivel $(1+x^3)' = 3x^2$, így

$$\begin{aligned} \int_1^3 x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx &= \frac{1}{3} \int_1^3 3x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx = \frac{1}{3} \left[\frac{3}{4} (1+x^3)^{4/3} \right]_1^3 = \\ &= \left[\frac{(1+x^3)^{4/3}}{4} \right]_1^3 = \frac{28^{4/3} - 2^{4/3}}{4} \approx 20,63. \end{aligned}$$

3. feladat (c)

Számítsuk ki a $\int_1^4 \ln(5x - 2) dx$ határozott integrált.

3. feladat (c)

Számítsuk ki a $\int_1^4 \ln(5x - 2) dx$ határozott integrált.

Parciális integrálással kapjuk, hogy

$$\int \ln(x) dx = \int 1 \cdot \ln(x) dx = x \ln(x) - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = x \ln(x) - x + C$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x & f'(x) &= \frac{1}{x} \\ g'(x) &= 1 & g(x) &= x \end{aligned}$$

melyet a lineáris helyettesítéssel használva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_1^4 \ln(5x - 2) dx &= \left[\frac{1}{5} ((5x - 2) \ln(5x - 2) - (5x - 2)) \right]_1^4 = \\ &= \frac{1}{5} (18 \ln(18) - 18) - \frac{1}{5} (3 \ln(3) - 3) \approx 6,75. \end{aligned}$$

3. feladat (d)

Számítsuk ki a $\int_3^4 \frac{x}{x^2 - 3x + 2} dx$ határozott integrált.

3. feladat (d)

Számítsuk ki a $\int_3^4 \frac{x}{x^2 - 3x + 2} dx$ határozott integrált.

Parciális törtekre bontással felhasználva, hogy a nevező gyökei 1 és 2:

$$\begin{aligned}\frac{x}{x^2 - 3x + 2} &= \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} \\ x &= A(x - 2) + B(x - 1) \\ x &= (A + B)x + (-2A - B)\end{aligned}$$

Ahonnán

$$1 = A + B$$

$$0 = -2A - B$$

Ezeket összeadva $1 = -A$, azaz $A = -1$, és így $B = 2$. Így az integrál:

$$\begin{aligned}\int_3^4 \frac{x}{x^2 - 3x + 2} dx &= \int_3^4 \frac{-1}{x - 1} + \frac{2}{x - 2} dx = [-\ln|x - 1| + 2\ln|x - 2|]_3^4 = \\ &= (-\ln 3 + 2\ln 2) - (-\ln 2 + 2\ln 1) = 3\ln 2 - \ln 3 = \\ &= \ln\left(\frac{8}{3}\right) \approx 0,981\end{aligned}$$

Opcionális feladat

Számítsuk ki az $\int e^{-x} \cos(2x) dx$ határozatlan integrált.

Házi feladatok

1. A parciális integrálás szabályát alkalmazva számítsuk ki az $\int x^2 \ln x \, dx$ határozatlan integrált.
2. Számítsuk ki az $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} \, dx$ határozott integrált.

Házi feladatok megoldása

1. Most az x^2 lesz a $g'(x)$ függvény:

$$f(x) = \ln x \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = x^2 \quad g(x) = \frac{x^3}{3}$$

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{1}{x} \frac{x^3}{3} \, dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \int \frac{x^2}{3} \, dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C$$

2. Mivel $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, így

$$\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} \, dx = [-\cos(\ln x)]_1^e = -\cos(1) - (-1) = 1 - \cos(1) \approx 0,46.$$