2. gyakorlat

Polinomok

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2023. szeptember 14.

1. feladat (a)

Alakítsuk szorzattá az $x^2 + 7x + 10$ kifejezést.

1. feladat (a)

Alakítsuk szorzattá az $x^2 + 7x + 10$ kifejezést.

A másodfokú egyenlet megoldóképlete segítségével a polinom két gyöke:

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 10}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-7 \pm 3}{2} = \begin{matrix} -2 \\ -5 \end{matrix}$$

1. feladat (a)

Alakítsuk szorzattá az $x^2 + 7x + 10$ kifejezést.

A másodfokú egyenlet megoldóképlete segítségével a polinom két gyöke:

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 10}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-7 \pm 3}{2} = \begin{matrix} -2 \\ -5 \end{matrix}$$

Így a polinom gyöktényezős alakja:

$$x^2 + 7x + 10 = (x - x_1)(x - x_2) = (x - (-2))(x - (-5)) = (x + 2)(x + 5)$$

1. feladat (b)

Alakítsuk szorzattá a $-2x^2 + 7x - 3$ kifejezést.

1. feladat (b)

Alakítsuk szorzattá a $-2x^2 + 7x - 3$ kifejezést.

Ebben az esetben a két gyök:

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot (-2) \cdot (-3)}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{-4} = \frac{-7 \pm 5}{-4} = \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ 3 \end{matrix}$$

1. feladat (b)

Alakítsuk szorzattá a $-2x^2 + 7x - 3$ kifejezést.

Ebben az esetben a két gyök:

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot (-2) \cdot (-3)}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{-4} = \frac{-7 \pm 5}{-4} = \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ 3 \end{matrix}$$

Így a szorzatalak (figyelembe véve, hogy a főegyüttható -2):

$$-2x^2 + 7x - 3 = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 3) = (1 - 2x)(x - 3)$$

2. feladat

Végezzük el a $(2x^4 - x^2 - 5x + 6) : (x^2 - 3x)$ polinomosztást.

2. feladat

Végezzük el a $(2x^4 - x^2 - 5x + 6) : (x^2 - 3x)$ polinomosztást.

Bár nem szerepel x^3-ös tag, azért be kell írnunk $0x^3$-öt:

$$2x^4 \quad + \quad 0x^3 \quad - \quad x^2 \quad - \quad 5x \quad + \quad 6 = (x^2 - 3x)($$

2. feladat

Végezzük el a $(2x^4 - x^2 - 5x + 6) : (x^2 - 3x)$ polinomosztást.

Bár nem szerepel x^3-ös tag, azért be kell írnunk $0x^3$-öt:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
2x^4 & + & 0x^3 & - & x^2 & - & 5x & + & 6 = (x^2 - 3x)(2x^2 \\
2x^4 & - & 6x^3 & & & & & & \\
\hline
\end{array}
$$

2. feladat

Végezzük el a $(2x^4 - x^2 - 5x + 6) : (x^2 - 3x)$ polinomosztást.

Bár nem szerepel x^3-ös tag, azért be kell írnunk $0x^3$-öt:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x^4 & + & 0x^3 & - & x^2 & - & 5x & + & 6 = (x^2 - 3x)(2x^2 \\ 2x^4 & - & 6x^3 & & & & & & \\ \hline & + & 6x^3 & - & x^2 & & & & \end{array}$$

2. feladat

Végezzük el a $(2x^4 - x^2 - 5x + 6) : (x^2 - 3x)$ polinomosztást.

Bár nem szerepel x^3-ös tag, azért be kell írnunk $0x^3$-öt:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrl}
2x^4 & + & 0x^3 & - & x^2 & - & 5x & + & 6 & = (x^2 - 3x)(2x^2 + 6x \\
\underline{2x^4} & \underline{-} & \underline{6x^3} & & & & & & & \\
 & + & 6x^3 & - & x^2 & & & & & \\
 & + & \underline{6x^3} & \underline{-} & \underline{18x^2} & & & & &
\end{array}
$$

2. feladat

Végezzük el a $(2x^4 - x^2 - 5x + 6) : (x^2 - 3x)$ polinomosztást.

Bár nem szerepel x^3-ös tag, azért be kell írnunk $0x^3$-öt:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
2x^4 & + & 0x^3 & - & x^2 & - & 5x & + & 6 = (x^2 - 3x)(2x^2 + 6x \\
2x^4 & - & 6x^3 & & & & & & \\
\hline
 & + & 6x^3 & - & x^2 & & & & \\
 & + & 6x^3 & - & 18x^2 & & & & \\
\cline{3-5}
 & & & + & 17x^2 & - & 5x & & \\
\end{array}
$$

2. feladat

Végezzük el a $(2x^4 - x^2 - 5x + 6) : (x^2 - 3x)$ polinomosztást.

Bár nem szerepel x^3-ös tag, azért be kell írnunk $0x^3$-öt:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
2x^4 & + & 0x^3 & - & x^2 & - & 5x & + & 6 = (x^2 - 3x)(2x^2 + 6x + 17 \\
2x^4 & - & 6x^3 & & & & & & \\
\hline
 & + & 6x^3 & - & x^2 & & & & \\
 & + & 6x^3 & - & 18x^2 & & & & \\
\hline
 & & & + & 17x^2 & - & 5x & & \\
 & & & + & 17x^2 & - & 51x & & \\
\hline
\end{array}
$$

2. feladat

Végezzük el a $(2x^4 - x^2 - 5x + 6) : (x^2 - 3x)$ polinomosztást.

Bár nem szerepel x^3-ös tag, azért be kell írnunk $0x^3$-öt:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrl}
2x^4 & + & 0x^3 & - & x^2 & - & 5x & + & 6 & = (x^2 - 3x)(2x^2 + 6x + 17 \\
2x^4 & - & 6x^3 & & & & & & & \\
\hline
 & + & 6x^3 & - & x^2 & & & & & \\
 & + & 6x^3 & - & 18x^2 & & & & & \\
\hline
 & & & + & 17x^2 & - & 5x & & & \\
 & & & + & 17x^2 & - & 51x & & & \\
\hline
 & & & & & + & 46x & + & 6 &
\end{array}
$$

2. feladat

Végezzük el a $(2x^4 - x^2 - 5x + 6) : (x^2 - 3x)$ polinomosztást.

Bár nem szerepel x^3-ös tag, azért be kell írnunk $0x^3$-öt:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
2x^4 & + & 0x^3 & - & x^2 & - & 5x & + & 6 = (x^2 - 3x)(2x^2 + 6x + 17) + \\
2x^4 & - & 6x^3 & & & & & & \quad + 46x + 6 \\
\hline
 & + & 6x^3 & - & x^2 & & & & \\
 & + & 6x^3 & - & 18x^2 & & & & \\
\cline{3-5}
 & & & + & 17x^2 & - & 5x & & \\
 & & & + & 17x^2 & - & 51x & & \\
\cline{5-7}
 & & & & & + & 46x & + & 6
\end{array}
$$

Tehát:

$$2x^4 - x^2 - 5x + 6 = (x^2 - 3x)(2x^2 + 6x + 17) + 46x + 6.$$

3. feladat

Keressük meg az $x^3 - x^2 - 25x + 25$ polinom egész gyökeit.

3. feladat

Keressük meg az $x^3 - x^2 - 25x + 25$ polinom egész gyökeit.

Előadáson szerepelt a következő tétel:
Az $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ egész együtthatós polinom $\frac{p}{q}$ racionális gyökeire (p, q egészek és relatív prímek) teljesül, hogy p osztja a_0-t és q osztja a_n-et.

3. feladat

Keressük meg az $x^3 - x^2 - 25x + 25$ polinom egész gyökeit.

Előadáson szerepelt a következő tétel:
Az $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ egész együtthatós polinom $\frac{p}{q}$ racionális gyökeire (p, q egészek és relatív prímek) teljesül, hogy p osztja a_0-t és q osztja a_n-et.

Esetünkben $a_n = 1$ és $a_0 = 25$.

3. feladat

Keressük meg az $x^3 - x^2 - 25x + 25$ polinom egész gyökeit.

Előadáson szerepelt a következő tétel:
Az $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ egész együtthatós polinom $\frac{p}{q}$ racionális gyökeire (p, q egészek és relatív prímek) teljesül, hogy p osztja a_0-t és q osztja a_n-et.

Esetünkben $a_n = 1$ és $a_0 = 25$.
Tudjuk, hogy q osztja $a_n = 1$-et, azaz $q = \pm 1$, feltehetjük, hogy $q = 1$.

3. feladat

Keressük meg az $x^3 - x^2 - 25x + 25$ polinom egész gyökeit.

Előadáson szerepelt a következő tétel:
Az $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ egész együtthatós polinom $\frac{p}{q}$ racionális gyökeire (p, q egészek és relatív prímek) teljesül, hogy p osztja a_0-t és q osztja a_n-et.

Esetünkben $a_n = 1$ és $a_0 = 25$.
Tudjuk, hogy q osztja $a_n = 1$-et, azaz $q = \pm 1$, feltehetjük, hogy $q = 1$.
Azt is tudjuk, hogy p osztja $a_0 = 25$-öt, így p lehetséges értékei:
$\pm 1, \pm 5, \pm 25$.

3. feladat

Keressük meg az $x^3 - x^2 - 25x + 25$ polinom egész gyökeit.

Előadáson szerepelt a következő tétel:
Az $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ egész együtthatós polinom $\frac{p}{q}$ racionális gyökeire (p, q egészek és relatív prímek) teljesül, hogy p osztja a_0-t és q osztja a_n-et.

Esetünkben $a_n = 1$ és $a_0 = 25$.
Tudjuk, hogy q osztja $a_n = 1$-et, azaz $q = \pm 1$, feltehetjük, hogy $q = 1$.
Azt is tudjuk, hogy p osztja $a_0 = 25$-öt, így p lehetséges értékei: $\pm 1, \pm 5, \pm 25$.
Ezeket behelyettesítjük, és megnézzük, hogy 0-t kapunk-e:

3. feladat

Keressük meg az $x^3 - x^2 - 25x + 25$ polinom egész gyökeit.

Előadáson szerepelt a következő tétel:
Az $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ egész együtthatós polinom $\frac{p}{q}$ racionális gyökeire (p, q egészek és relatív prímek) teljesül, hogy p osztja a_0-t és q osztja a_n-et.

Esetünkben $a_n = 1$ és $a_0 = 25$.
Tudjuk, hogy q osztja $a_n = 1$-et, azaz $q = \pm 1$, feltehetjük, hogy $q = 1$.
Azt is tudjuk, hogy p osztja $a_0 = 25$-öt, így p lehetséges értékei:
$\pm 1, \pm 5, \pm 25$.
Ezeket behelyettesítjük, és megnézzük, hogy 0-t kapunk-e:
$1^3 - 1^2 - 25 \cdot 1 + 25 = 0$, tehát az 1 gyök.

3. feladat

Keressük meg az $x^3 - x^2 - 25x + 25$ polinom egész gyökeit.

Előadáson szerepelt a következő tétel:
Az $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ egész együtthatós polinom $\frac{p}{q}$ racionális gyökeire (p, q egészek és relatív prímek) teljesül, hogy p osztja a_0-t és q osztja a_n-et.

Esetünkben $a_n = 1$ és $a_0 = 25$.
Tudjuk, hogy q osztja $a_n = 1$-et, azaz $q = \pm 1$, feltehetjük, hogy $q = 1$.
Azt is tudjuk, hogy p osztja $a_0 = 25$-öt, így p lehetséges értékei:
$\pm 1, \pm 5, \pm 25$.
Ezeket behelyettesítjük, és megnézzük, hogy 0-t kapunk-e:
$1^3 - 1^2 - 25 \cdot 1 + 25 = 0$, tehát az 1 gyök.
$(-1)^3 - (-1)^2 - 25 \cdot (-1) + 25 = 48$, tehát a -1 nem gyök.

3. feladat

Keressük meg az $x^3 - x^2 - 25x + 25$ polinom egész gyökeit.

Előadáson szerepelt a következő tétel:
Az $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ egész együtthatós polinom $\frac{p}{q}$ racionális gyökeire (p, q egészek és relatív prímek) teljesül, hogy p osztja a_0-t és q osztja a_n-et.

Esetünkben $a_n = 1$ és $a_0 = 25$.
Tudjuk, hogy q osztja $a_n = 1$-et, azaz $q = \pm 1$, feltehetjük, hogy $q = 1$.
Azt is tudjuk, hogy p osztja $a_0 = 25$-öt, így p lehetséges értékei:
$\pm 1, \pm 5, \pm 25$.
Ezeket behelyettesítjük, és megnézzük, hogy 0-t kapunk-e:
$1^3 - 1^2 - 25 \cdot 1 + 25 = 0$, tehát az 1 gyök.
$(-1)^3 - (-1)^2 - 25 \cdot (-1) + 25 = 48$, tehát a -1 nem gyök.
$5^3 - 5^2 - 25 \cdot 5 + 25 = 0$, tehát az 5 gyök.

3. feladat

Keressük meg az $x^3 - x^2 - 25x + 25$ polinom egész gyökeit.

Előadáson szerepelt a következő tétel:
Az $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ egész együtthatós polinom $\frac{p}{q}$ racionális gyökeire (p, q egészek és relatív prímek) teljesül, hogy p osztja a_0-t és q osztja a_n-et.

Esetünkben $a_n = 1$ és $a_0 = 25$.
Tudjuk, hogy q osztja $a_n = 1$-et, azaz $q = \pm 1$, feltehetjük, hogy $q = 1$.
Azt is tudjuk, hogy p osztja $a_0 = 25$-öt, így p lehetséges értékei:
$\pm 1, \pm 5, \pm 25$.
Ezeket behelyettesítjük, és megnézzük, hogy 0-t kapunk-e:
$1^3 - 1^2 - 25 \cdot 1 + 25 = 0$, tehát az 1 gyök.
$(-1)^3 - (-1)^2 - 25 \cdot (-1) + 25 = 48$, tehát a -1 nem gyök.
$5^3 - 5^2 - 25 \cdot 5 + 25 = 0$, tehát az 5 gyök.
$(-5)^3 - (-5)^2 - 25 \cdot (-5) + 25 = 0$, tehát a -5 gyök.

3. feladat

Keressük meg az $x^3 - x^2 - 25x + 25$ polinom egész gyökeit.

Előadáson szerepelt a következő tétel:
Az $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ egész együtthatós polinom $\frac{p}{q}$ racionális gyökeire (p, q egészek és relatív prímek) teljesül, hogy p osztja a_0-t és q osztja a_n-et.

Esetünkben $a_n = 1$ és $a_0 = 25$.
Tudjuk, hogy q osztja $a_n = 1$-et, azaz $q = \pm 1$, feltehetjük, hogy $q = 1$.
Azt is tudjuk, hogy p osztja $a_0 = 25$-öt, így p lehetséges értékei:
$\pm 1, \pm 5, \pm 25$.
Ezeket behelyettesítjük, és megnézzük, hogy 0-t kapunk-e:
$1^3 - 1^2 - 25 \cdot 1 + 25 = 0$, tehát az 1 gyök.
$(-1)^3 - (-1)^2 - 25 \cdot (-1) + 25 = 48$, tehát a -1 nem gyök.
$5^3 - 5^2 - 25 \cdot 5 + 25 = 0$, tehát az 5 gyök.
$(-5)^3 - (-5)^2 - 25 \cdot (-5) + 25 = 0$, tehát a -5 gyök.
$25^3 - 25^2 - 25 \cdot 25 + 25 = 14400$, tehát a 25 nem gyök.

3. feladat

Keressük meg az $x^3 - x^2 - 25x + 25$ polinom egész gyökeit.

Előadáson szerepelt a következő tétel:
Az $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ egész együtthatós polinom $\frac{p}{q}$ racionális gyökeire (p, q egészek és relatív prímek) teljesül, hogy p osztja a_0-t és q osztja a_n-et.

Esetünkben $a_n = 1$ és $a_0 = 25$.
Tudjuk, hogy q osztja $a_n = 1$-et, azaz $q = \pm 1$, feltehetjük, hogy $q = 1$.
Azt is tudjuk, hogy p osztja $a_0 = 25$-öt, így p lehetséges értékei:
$\pm 1, \pm 5, \pm 25$.
Ezeket behelyettesítjük, és megnézzük, hogy 0-t kapunk-e:
$1^3 - 1^2 - 25 \cdot 1 + 25 = 0$, tehát az 1 gyök.
$(-1)^3 - (-1)^2 - 25 \cdot (-1) + 25 = 48$, tehát a -1 nem gyök.
$5^3 - 5^2 - 25 \cdot 5 + 25 = 0$, tehát az 5 gyök.
$(-5)^3 - (-5)^2 - 25 \cdot (-5) + 25 = 0$, tehát a -5 gyök.
$25^3 - 25^2 - 25 \cdot 25 + 25 = 14400$, tehát a 25 nem gyök.
$(-25)^3 - (-25)^2 - 25 \cdot (-25) + 25 = -15600$, tehát a -25 nem gyök.

3. feladat

Keressük meg az $x^3 - x^2 - 25x + 25$ polinom egész gyökeit.

Előadáson szerepelt a következő tétel:
Az $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ egész együtthatós polinom $\frac{p}{q}$ racionális gyökeire (p, q egészek és relatív prímek) teljesül, hogy p osztja a_0-t és q osztja a_n-et.

Esetünkben $a_n = 1$ és $a_0 = 25$.
Tudjuk, hogy q osztja $a_n = 1$-et, azaz $q = \pm 1$, feltehetjük, hogy $q = 1$.
Azt is tudjuk, hogy p osztja $a_0 = 25$-öt, így p lehetséges értékei:
$\pm 1, \pm 5, \pm 25$.
Ezeket behelyettesítjük, és megnézzük, hogy 0-t kapunk-e:
$1^3 - 1^2 - 25 \cdot 1 + 25 = 0$, tehát az 1 gyök.
$(-1)^3 - (-1)^2 - 25 \cdot (-1) + 25 = 48$, tehát a -1 nem gyök.
$5^3 - 5^2 - 25 \cdot 5 + 25 = 0$, tehát az 5 gyök.
$(-5)^3 - (-5)^2 - 25 \cdot (-5) + 25 = 0$, tehát a -5 gyök.
$25^3 - 25^2 - 25 \cdot 25 + 25 = 14400$, tehát a 25 nem gyök.
$(-25)^3 - (-25)^2 - 25 \cdot (-25) + 25 = -15600$, tehát a -25 nem gyök.
Így a polinom egész gyökei az $1, 5, -5$.

3. feladat

Keressük meg az $x^3 - x^2 - 25x + 25$ polinom egész gyökeit.

Előadáson szerepelt a következő tétel:
Az $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ egész együtthatós polinom $\frac{p}{q}$ racionális gyökeire (p, q egészek és relatív prímek) teljesül, hogy p osztja a_0-t és q osztja a_n-et.

Esetünkben $a_n = 1$ és $a_0 = 25$.
Tudjuk, hogy q osztja $a_n = 1$-et, azaz $q = \pm 1$, feltehetjük, hogy $q = 1$.
Azt is tudjuk, hogy p osztja $a_0 = 25$-öt, így p lehetséges értékei:
$\pm 1, \pm 5, \pm 25$.
Ezeket behelyettesítjük, és megnézzük, hogy 0-t kapunk-e:
$1^3 - 1^2 - 25 \cdot 1 + 25 = 0$, tehát az 1 gyök.
$(-1)^3 - (-1)^2 - 25 \cdot (-1) + 25 = 48$, tehát a -1 nem gyök.
$5^3 - 5^2 - 25 \cdot 5 + 25 = 0$, tehát az 5 gyök.
$(-5)^3 - (-5)^2 - 25 \cdot (-5) + 25 = 0$, tehát a -5 gyök.
$25^3 - 25^2 - 25 \cdot 25 + 25 = 14400$, tehát a 25 nem gyök.
$(-25)^3 - (-25)^2 - 25 \cdot (-25) + 25 = -15600$, tehát a -25 nem gyök.
Így a polinom egész gyökei az $1, 5, -5$. Mivel egy harmadfokú polinomnak legfeljebb 3 darab gyöke lehet, így miután találtunk hármat, már nem is kellett volna ellenőrizni, hogy a ± 25 gyök-e.

4. feladat

Határozzuk meg az $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3$ polinom valamennyi valós gyökét.

4. feladat

Határozzuk meg az $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3$ polinom valamennyi valós gyökét.

Először megpróbálunk racionális gyököt keresni.

4. feladat

Határozzuk meg az $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3$ polinom valamennyi valós gyökét.

Először megpróbálunk racionális gyököt keresni.
Az 1 főegyüttható miatt ezek a -3 osztói lehetnek: $\pm 1, \pm 3$.

4. feladat

Határozzuk meg az $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3$ polinom valamennyi valós gyökét.

Először megpróbálunk racionális gyököt keresni.
Az 1 főegyüttható miatt ezek a -3 osztói lehetnek: $\pm 1, \pm 3$.
Az 1-et behelyettesítve 0-t kapunk, tehát $x_1 = 1$ gyök.

4. feladat

Határozzuk meg az $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3$ polinom valamennyi valós gyökét.

Először megpróbálunk racionális gyököt keresni.
Az 1 főegyüttható miatt ezek a -3 osztói lehetnek: $\pm 1, \pm 3$.
Az 1-et behelyettesítve 0-t kapunk, tehát $x_1 = 1$ gyök.
Ekkor az $x - 1$ tagot kiemeljük polinomosztással:

$$x^4 \quad - \quad 6x^3 \quad + \quad 10x^2 \quad - \quad 2x \quad - \quad 3 \quad = \quad (x-1)($$

4. feladat

Határozzuk meg az $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3$ polinom valamennyi valós gyökét.

Először megpróbálunk racionális gyököt keresni.
Az 1 főegyüttható miatt ezek a -3 osztói lehetnek: $\pm 1, \pm 3$.
Az 1-et behelyettesítve 0-t kapunk, tehát $x_1 = 1$ gyök.
Ekkor az $x - 1$ tagot kiemeljük polinomosztással:

$$\begin{array}{ccccccccccc} x^4 & - & 6x^3 & + & 10x^2 & - & 2x & - & 3 & = & (x-1)(x^3 \\ \underline{x^4} & \underline{-} & \underline{x^3} & & & & & & & & \end{array}$$

4. feladat

Határozzuk meg az $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3$ polinom valamennyi valós gyökét.

Először megpróbálunk racionális gyököt keresni.
Az 1 főegyüttható miatt ezek a -3 osztói lehetnek: $\pm1, \pm3$.
Az 1-et behelyettesítve 0-t kapunk, tehát $x_1 = 1$ gyök.
Ekkor az $x - 1$ tagot kiemeljük polinomosztással:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
x^4 & - & 6x^3 & + & 10x^2 & - & 2x & - & 3 & = & (x-1)(x^3 \\
x^4 & - & x^3 & & & & & & & & \\
\hline
& - & 5x^3 & + & 10x^2 & & & & & &
\end{array}
$$

4. feladat

Határozzuk meg az $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3$ polinom valamennyi valós gyökét.

Először megpróbálunk racionális gyököt keresni.
Az 1 főegyüttható miatt ezek a -3 osztói lehetnek: $\pm1, \pm3$.
Az 1-et behelyettesítve 0-t kapunk, tehát $x_1 = 1$ gyök.
Ekkor az $x - 1$ tagot kiemeljük polinomosztással:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrl}
x^4 & - & 6x^3 & + & 10x^2 & - & 2x & - & 3 & = & (x-1)(x^3 - 5x^2 \\
x^4 & - & x^3 & & & & & & & & \\
\hline
& - & 5x^3 & + & 10x^2 & & & & & & \\
& - & 5x^3 & + & 5x^2 & & & & & & \\
\hline
\end{array}$$

4. feladat

Határozzuk meg az $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3$ polinom valamennyi valós gyökét.

Először megpróbálunk racionális gyököt keresni.
Az 1 főegyüttható miatt ezek a -3 osztói lehetnek: $\pm 1, \pm 3$.
Az 1-et behelyettesítve 0-t kapunk, tehát $x_1 = 1$ gyök.
Ekkor az $x - 1$ tagot kiemeljük polinomosztással:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrr}
x^4 & - & 6x^3 & + & 10x^2 & - & 2x & - & 3 & = & (x-1)(x^3 - 5x^2 \\
x^4 & - & x^3 & & & & & & & & \\
\hline
 & - & 5x^3 & + & 10x^2 & & & & & & \\
 & - & 5x^3 & + & 5x^2 & & & & & & \\
\hline
 & & & + & 5x^2 & - & 2x & & & &
\end{array}$$

4. feladat

Határozzuk meg az $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3$ polinom valamennyi valós gyökét.

Először megpróbálunk racionális gyököt keresni.
Az 1 főegyüttható miatt ezek a -3 osztói lehetnek: $\pm 1, \pm 3$.
Az 1-et behelyettesítve 0-t kapunk, tehát $x_1 = 1$ gyök.
Ekkor az $x - 1$ tagot kiemeljük polinomosztással:

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
x^4 & - & 6x^3 & + & 10x^2 & - & 2x & - & 3 & = & (x-1)(x^3 - 5x^2 + 5x \\
x^4 & - & x^3 & & & & & & & & \\
\hline
 & - & 5x^3 & + & 10x^2 & & & & & & \\
 & - & 5x^3 & + & 5x^2 & & & & & & \\
\hline
 & & & + & 5x^2 & - & 2x & & & & \\
 & & & + & 5x^2 & - & 5x & & & & \\
\hline
\end{array}
$$

4. feladat

Határozzuk meg az $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3$ polinom valamennyi valós gyökét.

Először megpróbálunk racionális gyököt keresni.
Az 1 főegyüttható miatt ezek a -3 osztói lehetnek: $\pm 1, \pm 3$.
Az 1-et behelyettesítve 0-t kapunk, tehát $x_1 = 1$ gyök.
Ekkor az $x - 1$ tagot kiemeljük polinomosztással:

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
x^4 & - & 6x^3 & + & 10x^2 & - & 2x & - & 3 & = & (x-1)(x^3 - 5x^2 + 5x \\
x^4 & - & x^3 & & & & & & & & \\
\cline{1-3}
 & - & 5x^3 & + & 10x^2 & & & & & & \\
 & - & 5x^3 & + & 5x^2 & & & & & & \\
\cline{2-5}
 & & & + & 5x^2 & - & 2x & & & & \\
 & & & + & 5x^2 & - & 5x & & & & \\
\cline{4-7}
 & & & & & + & 3x & - & 3 & &
\end{array}
$$

4. feladat

Határozzuk meg az $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3$ polinom valamennyi valós gyökét.

Először megpróbálunk racionális gyököt keresni.
Az 1 főegyüttható miatt ezek a -3 osztói lehetnek: $\pm 1, \pm 3$.
Az 1-et behelyettesítve 0-t kapunk, tehát $x_1 = 1$ gyök.
Ekkor az $x - 1$ tagot kiemeljük polinomosztással:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
x^4 & - & 6x^3 & + & 10x^2 & - & 2x & - & 3 & = & (x-1)(x^3 - 5x^2 + 5x + 3) \\
x^4 & - & x^3 & & & & & & & & \\
\hline
 & - & 5x^3 & + & 10x^2 & & & & & & \\
 & - & 5x^3 & + & 5x^2 & & & & & & \\
\hline
 & & & + & 5x^2 & - & 2x & & & & \\
 & & & + & 5x^2 & - & 5x & & & & \\
\hline
 & & & & & + & 3x & - & 3 & & \\
 & & & & & + & 3x & - & 3 & & \\
\hline
\end{array}
$$

4. feladat

Határozzuk meg az $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3$ polinom valamennyi valós gyökét.

Először megpróbálunk racionális gyököt keresni.
Az 1 főegyüttható miatt ezek a -3 osztói lehetnek: $\pm 1, \pm 3$.
Az 1-et behelyettesítve 0-t kapunk, tehát $x_1 = 1$ gyök.
Ekkor az $x - 1$ tagot kiemeljük polinomosztással:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrl}
x^4 & - & 6x^3 & + & 10x^2 & - & 2x & - & 3 & = & (x-1)(x^3 - 5x^2 + 5x + 3) \\
x^4 & - & x^3 & & & & & & & & \\
\hline
 & - & 5x^3 & + & 10x^2 & & & & & & \\
 & - & 5x^3 & + & 5x^2 & & & & & & \\
\hline
 & & & + & 5x^2 & - & 2x & & & & \\
 & & & + & 5x^2 & - & 5x & & & & \\
\hline
 & & & & & + & 3x & - & 3 & & \\
 & & & & & + & 3x & - & 3 & & \\
\hline
 & & & & & & & & 0 & &
\end{array}
$$

Maradék nincsen, mert az 1 gyök.

4. feladat – folytatás

Ekkor a kapott $x^3 - 5x^2 + 5x + 3$ polinom gyökeit keressük tovább.

4. feladat – folytatás

Ekkor a kapott $x^3 - 5x^2 + 5x + 3$ polinom gyökeit keressük tovább. Ennek a racionális gyökei a $\pm 1, \pm 3$ lehetnek, ezekkel próbálkozunk.

4. feladat – folytatás

Ekkor a kapott $x^3 - 5x^2 + 5x + 3$ polinom gyökeit keressük tovább. Ennek a racionális gyökei a $\pm 1, \pm 3$ lehetnek, ezekkel próbálkozunk. Így azt kapjuk, hogy az $x_2 = 3$ gyök, melyet kimelhetünk:

4. feladat – folytatás

Ekkor a kapott $x^3 - 5x^2 + 5x + 3$ polinom gyökeit keressük tovább. Ennek a racionális gyökei a $\pm 1, \pm 3$ lehetnek, ezekkel próbálkozunk. Így azt kapjuk, hogy az $x_2 = 3$ gyök, melyet kimelhetünk:

$$x^3 \quad - \quad 5x^2 \quad + \quad 5x \quad + \quad 3 \quad = \quad (x-3)($$

4. feladat – folytatás

Ekkor a kapott $x^3 - 5x^2 + 5x + 3$ polinom gyökeit keressük tovább. Ennek a racionális gyökei a $\pm 1, \pm 3$ lehetnek, ezekkel próbálkozunk. Így azt kapjuk, hogy az $x_2 = 3$ gyök, melyet kimelhetünk:

$$\begin{array}{ccccccccc} x^3 & - & 5x^2 & + & 5x & + & 3 & = & (x-3)(x^2 \\ x^3 & - & 3x^2 & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

4. feladat – folytatás

Ekkor a kapott $x^3 - 5x^2 + 5x + 3$ polinom gyökeit keressük tovább. Ennek a racionális gyökei a $\pm 1, \pm 3$ lehetnek, ezekkel próbálkozunk. Így azt kapjuk, hogy az $x_2 = 3$ gyök, melyet kimelhetünk:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x^3 & - & 5x^2 & + & 5x & + & 3 & = & (x-3)(x^2 \\
x^3 & - & 3x^2 & & & & & & \\
\hline
 & - & 2x^2 & + & 5x & & & &
\end{array}
$$

4. feladat – folytatás

Ekkor a kapott $x^3 - 5x^2 + 5x + 3$ polinom gyökeit keressük tovább. Ennek a racionális gyökei a $\pm 1, \pm 3$ lehetnek, ezekkel próbálkozunk. Így azt kapjuk, hogy az $x_2 = 3$ gyök, melyet kimelhetünk:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x^3 & - & 5x^2 & + & 5x & + & 3 & = & (x-3)(x^2-2x \\
x^3 & - & 3x^2 & & & & & & \\
\hline
 & - & 2x^2 & + & 5x & & & & \\
 & - & 2x^2 & + & 6x & & & & \\
\cline{2-5}
\end{array}
$$

4. feladat – folytatás

Ekkor a kapott $x^3 - 5x^2 + 5x + 3$ polinom gyökeit keressük tovább. Ennek a racionális gyökei a $\pm 1, \pm 3$ lehetnek, ezekkel próbálkozunk. Így azt kapjuk, hogy az $x_2 = 3$ gyök, melyet kimelhetünk:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x^3 & - & 5x^2 & + & 5x & + & 3 & = & (x-3)(x^2 - 2x \\
x^3 & - & 3x^2 & & & & & & \\
\hline
 & - & 2x^2 & + & 5x & & & & \\
 & - & 2x^2 & + & 6x & & & & \\
\hline
 & & & - & x & + & 3 & &
\end{array}
$$

4. feladat – folytatás

Ekkor a kapott $x^3 - 5x^2 + 5x + 3$ polinom gyökeit keressük tovább.
Ennek a racionális gyökei a $\pm 1, \pm 3$ lehetnek, ezekkel próbálkozunk.
Így azt kapjuk, hogy az $x_2 = 3$ gyök, melyet kimelhetünk:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x^3 & - & 5x^2 & + & 5x & + & 3 & = & (x-3)(x^2-2x-1) \\
x^3 & - & 3x^2 & & & & & & \\
\hline
 & - & 2x^2 & + & 5x & & & & \\
 & - & 2x^2 & + & 6x & & & & \\
\hline
 & & & - & x & + & 3 & & \\
 & & & - & x & + & 3 & & \\
\hline
\end{array}
$$

4. feladat – folytatás

Ekkor a kapott $x^3 - 5x^2 + 5x + 3$ polinom gyökeit keressük tovább. Ennek a racionális gyökei a $\pm 1, \pm 3$ lehetnek, ezekkel próbálkozunk. Így azt kapjuk, hogy az $x_2 = 3$ gyök, melyet kimelhetünk:

$$
\begin{array}{rrrrrrrcl}
x^3 & - & 5x^2 & + & 5x & + & 3 & = & (x-3)(x^2-2x-1) \\
x^3 & - & 3x^2 & & & & & & \\
\hline
 & - & 2x^2 & + & 5x & & & & \\
 & - & 2x^2 & + & 6x & & & & \\
\hline
 & & & - & x & + & 3 & & \\
 & & & - & x & + & 3 & & \\
\hline
 & & & & & & 0 & &
\end{array}
$$

4. feladat – folytatás

Ekkor a kapott $x^3 - 5x^2 + 5x + 3$ polinom gyökeit keressük tovább.
Ennek a racionális gyökei a $\pm 1, \pm 3$ lehetnek, ezekkel próbálkozunk.
Így azt kapjuk, hogy az $x_2 = 3$ gyök, melyet kimelhetünk:

$$\begin{array}{rrrrrrrrr}
x^3 & - & 5x^2 & + & 5x & + & 3 & = & (x-3)(x^2-2x-1) \\
x^3 & - & 3x^2 & & & & & & \\
\hline
 & - & 2x^2 & + & 5x & & & & \\
 & - & 2x^2 & + & 6x & & & & \\
\hline
 & & & - & x & + & 3 & & \\
 & & & - & x & + & 3 & & \\
\hline
 & & & & & & 0 & &
\end{array}$$

Végül az $x^2 - 2x - 1$ másodfokú polinom gyökeit a másodfokú egyenlet megoldóképletével határozhatjuk meg:

4. feladat – folytatás

Ekkor a kapott $x^3 - 5x^2 + 5x + 3$ polinom gyökeit keressük tovább. Ennek a racionális gyökei a $\pm 1, \pm 3$ lehetnek, ezekkel próbálkozunk. Így azt kapjuk, hogy az $x_2 = 3$ gyök, melyet kimelhetünk:

$$\begin{array}{rrrrrrrrr}
x^3 & - & 5x^2 & + & 5x & + & 3 & = & (x-3)(x^2-2x-1) \\
x^3 & - & 3x^2 & & & & & & \\
\hline
 & - & 2x^2 & + & 5x & & & & \\
 & - & 2x^2 & + & 6x & & & & \\
\hline
 & & & - & x & + & 3 & & \\
 & & & - & x & + & 3 & & \\
\hline
 & & & & & & 0 & &
\end{array}$$

Végül az $x^2 - 2x - 1$ másodfokú polinom gyökeit a másodfokú egyenlet megoldóképletével határozhatjuk meg:

$$x_{3,4} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-1)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

4. feladat – folytatás

Ekkor a kapott $x^3 - 5x^2 + 5x + 3$ polinom gyökeit keressük tovább. Ennek a racionális gyökei a $\pm 1, \pm 3$ lehetnek, ezekkel próbálkozunk. Így azt kapjuk, hogy az $x_2 = 3$ gyök, melyet kimelhetünk:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x^3 & - & 5x^2 & + & 5x & + & 3 & = & (x-3)(x^2-2x-1) \\
x^3 & - & 3x^2 & & & & & & \\
\hline
 & - & 2x^2 & + & 5x & & & & \\
 & - & 2x^2 & + & 6x & & & & \\
\hline
 & & & - & x & + & 3 & & \\
 & & & - & x & + & 3 & & \\
\hline
 & & & & & & 0 & &
\end{array}
$$

Végül az $x^2 - 2x - 1$ másodfokú polinom gyökeit a másodfokú egyenlet megoldóképletével határozhatjuk meg:

$$x_{3,4} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-1)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Tehát a negyedokú polinom (valós) gyökei: $1, 3, 1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}$.

5. feladat

A c valós szám mely értékére lesz az $x_1 = 1$ szám gyöke a $4x^4 + cx^3 - 3x^2 - 4x - 1$ polinomnak? Határozzuk meg az így adódó polinom valós gyökeit, és írjuk fel a polinom gyöktényezős alakját.

5. feladat

A c valós szám mely értékére lesz az $x_1 = 1$ szám gyöke a $4x^4 + cx^3 - 3x^2 - 4x - 1$ polinomnak? Határozzuk meg az így adódó polinom valós gyökeit, és írjuk fel a polinom gyöktényezős alakját.

A polinomba $x = 1$-et helyettesítve:
$4 \cdot 1^4 + c \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 1 = c - 4$, tehát $c = 4$ esetén gyök az 1.

5. feladat

A c valós szám mely értékére lesz az $x_1 = 1$ szám gyöke a $4x^4 + cx^3 - 3x^2 - 4x - 1$ polinomnak? Határozzuk meg az így adódó polinom valós gyökeit, és írjuk fel a polinom gyöktényezős alakját.

A polinomba $x = 1$-et helyettesítve:
$4 \cdot 1^4 + c \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 1 = c - 4$, tehát $c = 4$ esetén gyök az 1.

A $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ polinom lehetséges racionális gyökei

5. feladat

A c valós szám mely értékére lesz az $x_1 = 1$ szám gyöke a $4x^4 + cx^3 - 3x^2 - 4x - 1$ polinomnak? Határozzuk meg az így adódó polinom valós gyökeit, és írjuk fel a polinom gyöktényezős alakját.

A polinomba $x = 1$-et helyettesítve:
$4 \cdot 1^4 + c \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 1 = c - 4$, tehát $c = 4$ esetén gyök az 1.

A $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ polinom lehetséges racionális gyökei (p osztja 1-et és q osztja 4-et):

5. feladat

A c valós szám mely értékére lesz az $x_1 = 1$ szám gyöke a $4x^4 + cx^3 - 3x^2 - 4x - 1$ polinomnak? Határozzuk meg az így adódó polinom valós gyökeit, és írjuk fel a polinom gyöktényezős alakját.

A polinomba $x = 1$-et helyettesítve:
$4 \cdot 1^4 + c \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 1 = c - 4$, tehát $c = 4$ esetén gyök az 1.

A $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ polinom lehetséges racionális gyökei (p osztja 1-et és q osztja 4-et): $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$.

5. feladat

A c valós szám mely értékére lesz az $x_1 = 1$ szám gyöke a $4x^4 + cx^3 - 3x^2 - 4x - 1$ polinomnak? Határozzuk meg az így adódó polinom valós gyökeit, és írjuk fel a polinom gyöktényezős alakját.

A polinomba $x = 1$-et helyettesítve:
$4 \cdot 1^4 + c \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 1 = c - 4$, tehát $c = 4$ esetén gyök az 1.

A $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ polinom lehetséges racionális gyökei (p osztja 1-et és q osztja 4-et): $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$.
Az $x_1 = 1$ gyök, így azt kiemelhetjük polinomosztással:

$$4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = (x - 1)($$

5. feladat

A c valós szám mely értékére lesz az $x_1 = 1$ szám gyöke a $4x^4 + cx^3 - 3x^2 - 4x - 1$ polinomnak? Határozzuk meg az így adódó polinom valós gyökeit, és írjuk fel a polinom gyöktényezős alakját.

A polinomba $x = 1$-et helyettesítve:
$4 \cdot 1^4 + c \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 1 = c - 4$, tehát $c = 4$ esetén gyök az 1.

A $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ polinom lehetséges racionális gyökei (p osztja 1-et és q osztja 4-et): $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}$.
Az $x_1 = 1$ gyök, így azt kiemelhetjük polinomosztással:

$$4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = (x - 1)(4x^3$$

5. feladat

A c valós szám mely értékére lesz az $x_1 = 1$ szám gyöke a $4x^4 + cx^3 - 3x^2 - 4x - 1$ polinomnak? Határozzuk meg az így adódó polinom valós gyökeit, és írjuk fel a polinom gyöktényezős alakját.

A polinomba $x = 1$-et helyettesítve:
$4 \cdot 1^4 + c \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 1 = c - 4$, tehát $c = 4$ esetén gyök az 1.

A $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ polinom lehetséges racionális gyökei (p osztja 1-et és q osztja 4-et): $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$.
Az $x_1 = 1$ gyök, így azt kiemelhetjük polinomosztással:

$$4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = (x - 1)(4x^3 + 8x^2$$

5. feladat

A c valós szám mely értékére lesz az $x_1 = 1$ szám gyöke a $4x^4 + cx^3 - 3x^2 - 4x - 1$ polinomnak? Határozzuk meg az így adódó polinom valós gyökeit, és írjuk fel a polinom gyöktényezős alakját.

A polinomba $x = 1$-et helyettesítve:
$4 \cdot 1^4 + c \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 1 = c - 4$, tehát $c = 4$ esetén gyök az 1.

A $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ polinom lehetséges racionális gyökei (p osztja 1-et és q osztja 4-et): $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$.
Az $x_1 = 1$ gyök, így azt kiemelhetjük polinomosztással:

$$4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = (x - 1)(4x^3 + 8x^2 + 5x$$

5. feladat

A c valós szám mely értékére lesz az $x_1 = 1$ szám gyöke a $4x^4 + cx^3 - 3x^2 - 4x - 1$ polinomnak? Határozzuk meg az így adódó polinom valós gyökeit, és írjuk fel a polinom gyöktényezős alakját.

A polinomba $x = 1$-et helyettesítve:
$4 \cdot 1^4 + c \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 1 = c - 4$, tehát $c = 4$ esetén gyök az 1.

A $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ polinom lehetséges racionális gyökei (p osztja 1-et és q osztja 4-et): $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$.
Az $x_1 = 1$ gyök, így azt kiemelhetjük polinomosztással:

$$4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = (x - 1)(4x^3 + 8x^2 + 5x + 1)$$

5. feladat

A c valós szám mely értékére lesz az $x_1 = 1$ szám gyöke a $4x^4 + cx^3 - 3x^2 - 4x - 1$ polinomnak? Határozzuk meg az így adódó polinom valós gyökeit, és írjuk fel a polinom gyöktényezős alakját.

A polinomba $x = 1$-et helyettesítve:
$4 \cdot 1^4 + c \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 1 = c - 4$, tehát $c = 4$ esetén gyök az 1.

A $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ polinom lehetséges racionális gyökei (p osztja 1-et és q osztja 4-et): $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}$.
Az $x_1 = 1$ gyök, így azt kiemelhetjük polinomosztással:

$$4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = (x - 1)(4x^3 + 8x^2 + 5x + 1)$$

Az így kapott $4x^3 + 8x^2 + 5x + 1$ polinom racionális gyökei

5. feladat

A c valós szám mely értékére lesz az $x_1 = 1$ szám gyöke a $4x^4 + cx^3 - 3x^2 - 4x - 1$ polinomnak? Határozzuk meg az így adódó polinom valós gyökeit, és írjuk fel a polinom gyöktényezős alakját.

A polinomba $x = 1$-et helyettesítve:
$4 \cdot 1^4 + c \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 1 = c - 4$, tehát $c = 4$ esetén gyök az 1.

A $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ polinom lehetséges racionális gyökei (p osztja 1-et és q osztja 4-et): $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}$.
Az $x_1 = 1$ gyök, így azt kiemelhetjük polinomosztással:

$$4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = (x-1)(4x^3 + 8x^2 + 5x + 1)$$

Az így kapott $4x^3 + 8x^2 + 5x + 1$ polinom racionális gyökei szintén a $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}$ lehetnek, így ezekkel próbálkozunk.

5. feladat

A c valós szám mely értékére lesz az $x_1 = 1$ szám gyöke a $4x^4 + cx^3 - 3x^2 - 4x - 1$ polinomnak? Határozzuk meg az így adódó polinom valós gyökeit, és írjuk fel a polinom gyöktényezős alakját.

A polinomba $x = 1$-et helyettesítve:
$4 \cdot 1^4 + c \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 1 = c - 4$, tehát $c = 4$ esetén gyök az 1.

A $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ polinom lehetséges racionális gyökei (p osztja 1-et és q osztja 4-et): $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}$.
Az $x_1 = 1$ gyök, így azt kiemelhetjük polinomosztással:

$$4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = (x - 1)(4x^3 + 8x^2 + 5x + 1)$$

Az így kapott $4x^3 + 8x^2 + 5x + 1$ polinom racionális gyökei szintén a $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}$ lehetnek, így ezekkel próbálkozunk.
Az $x_2 = -1$ is gyök, így azt is kiemeljük:

$$4x^3 + 8x^2 + 5x + 1 = (x + 1)($$

5. feladat

A c valós szám mely értékére lesz az $x_1 = 1$ szám gyöke a $4x^4 + cx^3 - 3x^2 - 4x - 1$ polinomnak? Határozzuk meg az így adódó polinom valós gyökeit, és írjuk fel a polinom gyöktényezős alakját.

A polinomba $x = 1$-et helyettesítve:
$4 \cdot 1^4 + c \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 1 = c - 4$, tehát $c = 4$ esetén gyök az 1.

A $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ polinom lehetséges racionális gyökei (p osztja 1-et és q osztja 4-et): $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}$.
Az $x_1 = 1$ gyök, így azt kiemelhetjük polinomosztással:

$$4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = (x-1)(4x^3 + 8x^2 + 5x + 1)$$

Az így kapott $4x^3 + 8x^2 + 5x + 1$ polinom racionális gyökei szintén a $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}$ lehetnek, így ezekkel próbálkozunk.
Az $x_2 = -1$ is gyök, így azt is kiemeljük:

$$4x^3 + 8x^2 + 5x + 1 = (x+1)(4x^2$$

5. feladat

A c valós szám mely értékére lesz az $x_1 = 1$ szám gyöke a $4x^4 + cx^3 - 3x^2 - 4x - 1$ polinomnak? Határozzuk meg az így adódó polinom valós gyökeit, és írjuk fel a polinom gyöktényezős alakját.

A polinomba $x = 1$-et helyettesítve:
$4 \cdot 1^4 + c \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 1 = c - 4$, tehát $c = 4$ esetén gyök az 1.

A $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ polinom lehetséges racionális gyökei (p osztja 1-et és q osztja 4-et): $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}$.
Az $x_1 = 1$ gyök, így azt kiemelhetjük polinomosztással:

$$4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = (x - 1)(4x^3 + 8x^2 + 5x + 1)$$

Az így kapott $4x^3 + 8x^2 + 5x + 1$ polinom racionális gyökei szintén a $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}$ lehetnek, így ezekkel próbálkozunk.
Az $x_2 = -1$ is gyök, így azt is kiemeljük:

$$4x^3 + 8x^2 + 5x + 1 = (x + 1)(4x^2 + 4x$$

5. feladat

A c valós szám mely értékére lesz az $x_1 = 1$ szám gyöke a $4x^4 + cx^3 - 3x^2 - 4x - 1$ polinomnak? Határozzuk meg az így adódó polinom valós gyökeit, és írjuk fel a polinom gyöktényezős alakját.

A polinomba $x = 1$-et helyettesítve:
$4 \cdot 1^4 + c \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 1 = c - 4$, tehát $c = 4$ esetén gyök az 1.

A $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ polinom lehetséges racionális gyökei (p osztja 1-et és q osztja 4-et): $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}$.
Az $x_1 = 1$ gyök, így azt kiemelhetjük polinomosztással:

$$4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = (x - 1)(4x^3 + 8x^2 + 5x + 1)$$

Az így kapott $4x^3 + 8x^2 + 5x + 1$ polinom racionális gyökei szintén a $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}$ lehetnek, így ezekkel próbálkozunk.
Az $x_2 = -1$ is gyök, így azt is kiemeljük:

$$4x^3 + 8x^2 + 5x + 1 = (x + 1)(4x^2 + 4x + 1)$$

5. feladat – folytatás

A $4x^2 + 4x + 1$ másodfokú polinomra a megoldóképlet:

5. feladat – folytatás

A $4x^2 + 4x + 1$ másodfokú polinomra a megoldóképlet:

$$x_{3,4} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2},$$

5. feladat – folytatás

A $4x^2 + 4x + 1$ másodfokú polinomra a megoldóképlet:

$$x_{3,4} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{8} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2},$$

azaz a $-\frac{1}{2}$ kétszeres gyöke (azaz $4x^2 + 4x + 1 = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$).

5. feladat – folytatás

A $4x^2 + 4x + 1$ másodfokú polinomra a megoldóképlet:

$$x_{3,4} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2},$$

azaz a $-\frac{1}{2}$ kétszeres gyöke (azaz $4x^2 + 4x + 1 = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$).
Tehát az eredeti negyedfokú polinom gyökei: $1, -1, -\frac{1}{2}$, legutóbbi kétszeres.

5. feladat – folytatás

A $4x^2 + 4x + 1$ másodfokú polinomra a megoldóképlet:

$$x_{3,4} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2},$$

azaz a $-\frac{1}{2}$ kétszeres gyöke (azaz $4x^2 + 4x + 1 = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$).

Tehát az eredeti negyedfokú polinom gyökei: $1, -1, -\frac{1}{2}$, legutóbbi kétszeres.

Így a gyöktényezős felbontás:

$$4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = 4(x-1)(x+1)\left(x + \frac{1}{2}\right)^2,$$

ahol a legutolsó tag azért van négyzeten, mert a hozzá tartozó $-\frac{1}{2}$ gyök kétszeres.

Házi feladat

Keressük meg az alábbi polinomok valós gyökeit.

(a) $x^4 - 6x^2 + x + 6$,

(b) $x^4 - 6x^3 + 27x - 10$.

Házi feladat megoldása

(a) $-1, 2, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$,

(b) $-2, 5, \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$.