

# 5. gyakorlat

## Differenciálszámítás

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,  
Algebra és Geometria Tanszék

2023. október 12.

# 1. feladat

Írjuk fel az  $f(x) = \sin x$  függvény grafikonjához húzott érintő egyenes egyenletét az  $x_0 = 0$  és az  $x_0 = \frac{\pi}{2}$  pontokban.

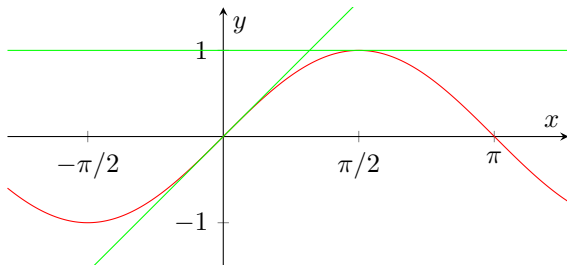
# 1. feladat

Írjuk fel az  $f(x) = \sin x$  függvény grafikonjához húzott érintő egyenes egyenletét az  $x_0 = 0$  és az  $x_0 = \frac{\pi}{2}$  pontokban.

Előadáson szerepelt, hogy  $f'(x) = (\sin x)' = \cos x$ .

Az érintő meredekségét az adott pontbeli derivált adja meg. Ez az első esetben  $f'(0) = \cos 0 = 1$ . Az  $x_0 = 0$  ponthoz az origó tartozik (a függvény értéke is 0), így az origón átmenő, 1 meredekségű egyenest kell felírni, aminek az egyenlete  $y = x$ .

A második esetben  $f'(\frac{\pi}{2}) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$ , tehát az érintő meredeksége 0, ez egy vízszintes egyenes. Ennek át kell mennie a  $x_0 = \frac{\pi}{2}$  ponthoz tartozó grafikonpontra, ami a  $(\frac{\pi}{2}, 1)$  pont. Így az egyenes egyenlete  $y = 1$ .



## 2. feladat (a)

Számítsuk ki az  $f(x) = x^3 - 5x^2 + 5x + 11$  függvény deriváltját.

## 2. feladat (a)

Számítsuk ki az  $f(x) = x^3 - 5x^2 + 5x + 11$  függvény deriváltját.

Felhasználjuk, hogy  $(x^n)' = nx^{n-1}$ , tehát  $(x^3)' = 3x^2$ ,  $(x^2)' = 2x$  és  $(x)' = 1$ .

## 2. feladat (a)

Számítsuk ki az  $f(x) = x^3 - 5x^2 + 5x + 11$  függvény deriváltját.

Felhasználjuk, hogy  $(x^n)' = nx^{n-1}$ , tehát  $(x^3)' = 3x^2$ ,  $(x^2)' = 2x$  és  $(x)' = 1$ .

$$(x^3 - 5x^2 + 5x + 11)' = 3x^2 - 5 \cdot 2x + 5 \cdot 1 + 0 = 3x^2 - 10x + 5$$

## 2. feladat (b)

Számítsuk ki az  $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{5x^5}$  függvény deriváltját.

## 2. feladat (b)

Számítsuk ki az  $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{5x^5}$  függvény deriváltját.

Most is használjuk, hogy  $(x^n)' = nx^{n-1}$ , de nem csak természetes szám  $n$ -re. Ehhez először ilyen alakra írjuk át a tagokat:



## 2. feladat (b)

Számítsuk ki az  $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{5x^5}$  függvény deriváltját.

Most is használjuk, hogy  $(x^n)' = nx^{n-1}$ , de nem csak természetes szám  $n$ -re. Ehhez először ilyen alakra írjuk át a tagokat:

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{5x^5} = x^{\frac{1}{2}} + x^{-2} - \frac{1}{5}x^{-5}$$

## 2. feladat (b)

Számítsuk ki az  $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{5x^5}$  függvény deriváltját.

Most is használjuk, hogy  $(x^n)' = nx^{n-1}$ , de nem csak természetes szám  $n$ -re. Ehhez először ilyen alakra írjuk át a tagokat:

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{5x^5} = x^{\frac{1}{2}} + x^{-2} - \frac{1}{5}x^{-5}$$

Ezzel:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{-3} - \frac{1}{5}(-5)x^{-6} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^6}.$$

## 2. feladat (c)

Számítsuk ki az  $f(x) = 3^x - \cos x$  függvény deriváltját.

## 2. feladat (c)

Számítsuk ki az  $f(x) = 3^x - \cos x$  függvény deriváltját.

Azt kell tudni, hogy  $(a^x)' = a^x \ln a$  és  $(\cos x)' = -\sin x$ .

## 2. feladat (c)

Számítsuk ki az  $f(x) = 3^x - \cos x$  függvény deriváltját.

Azt kell tudni, hogy  $(a^x)' = a^x \ln a$  és  $(\cos x)' = -\sin x$ .

$$(3^x - \cos x)' = 3^x \ln 3 - (-\sin x) = 3^x \ln 3 + \sin x$$

## 2. feladat (d)

Számítsuk ki az  $(1 + x^3)\operatorname{tg} x$  függvény deriváltját.

## 2. feladat (d)

Számítsuk ki az  $(1 + x^3)\operatorname{tg} x$  függvény deriváltját.

Ez két függvény szorzata, így a Leibniz-szabályt alkalmazzuk:

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Továbbá még azt is felhasználjuk, hogy  $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ .

## 2. feladat (d)

Számítsuk ki az  $(1 + x^3)\operatorname{tg} x$  függvény deriváltját.

Ez két függvény szorzata, így a Leibniz-szabályt alkalmazzuk:

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Továbbá még azt is felhasználjuk, hogy  $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ .

$$\begin{aligned} ((1 + x^3)\operatorname{tg} x)' &= (1 + x^3)'\operatorname{tg} x + (1 + x^3)(\operatorname{tg} x)' = \\ &= 3x^2\operatorname{tg} x + (1 + x^3)\frac{1}{\cos^2(x)} = \\ &= 3x^2\operatorname{tg} x + \frac{1 + x^3}{\cos^2(x)} \end{aligned}$$



## 2. feladat (e)

Számítsuk ki az  $e^x \operatorname{ch} x$  függvény deriváltját.

## 2. feladat (e)

Számítsuk ki az  $e^x \operatorname{ch} x$  függvény deriváltját.

Ez is egy szorzat, így itt is használjuk a Leibniz-szabályt:

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Továbbá még azt is felhasználjuk, hogy  $(e^x)' = e^x$  és  $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$ .

## 2. feladat (e)

Számítsuk ki az  $e^x \operatorname{ch} x$  függvény deriváltját.

Ez is egy szorzat, így itt is használjuk a Leibniz-szabályt:

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Továbbá még azt is felhasználjuk, hogy  $(e^x)' = e^x$  és  $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$ .

$$\begin{aligned}(e^x \operatorname{ch} x)' &= (e^x)' \operatorname{ch} x + e^x (\operatorname{ch} x)' = e^x \operatorname{ch} x + e^x \operatorname{sh} x = e^x (\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x) = \\ &= e^x \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) = e^x \frac{2e^x}{2} = e^x e^x = e^{2x}\end{aligned}$$

Ugyanerre az eredményre jutunk, ha már az elején beszorzunk:

$$e^x \operatorname{ch} x = e^x \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) = \frac{e^x e^x + e^x e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2},$$

melynek deriváltja:

$$\left( \frac{e^{2x} + 1}{2} \right)' = \frac{e^{2x} \cdot 2 + 0}{2} = e^{2x}$$

## 2. feladat (f)

Számítsuk ki az  $\frac{x^3 + 2}{x - 2}$  függvény deriváltját.

## 2. feladat (f)

Számítsuk ki az  $\frac{x^3 + 2}{x - 2}$  függvény deriváltját.

Ez egy hányados, így a hányados deriválási szabályát használjuk:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

## 2. feladat (f)

Számítsuk ki az  $\frac{x^3 + 2}{x - 2}$  függvény deriváltját.

Ez egy hányados, így a hányados deriválási szabályát használjuk:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^3 + 2}{x - 2}\right)' &= \frac{(x^3 + 2)'(x - 2) - (x^3 + 2)(x - 2)'}{(x - 2)^2} = \\ &= \frac{3x^2(x - 2) - (x^3 + 2)}{(x - 2)^2} = \frac{2x^3 - 6x^2 - 2}{(x - 2)^2}\end{aligned}$$

## 2. feladat (g)

Számítsuk ki az  $\frac{\ln(x)}{5}$  függvény deriváltját.

## 2. feladat (g)

Számítsuk ki az  $\frac{\ln(x)}{5}$  függvény deriváltját.

Látszólag ez is egy tört, de nem érdemes törtként deriválni, mivel a nevező egy konstans. Még azt is felhasználjuk, hogy  $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ .



## 2. feladat (g)

Számítsuk ki az  $\frac{\ln(x)}{5}$  függvény deriváltját.

Látszólag ez is egy tört, de nem érdemes törtként deriválni, mivel a nevező egy konstans. Még azt is felhasználjuk, hogy  $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ .

$$\left(\frac{\ln(x)}{5}\right)' = \left(\frac{1}{5} \ln(x)\right)' = \frac{1}{5} \frac{1}{x} = \frac{1}{5x}$$

### 3. feladat

Legyen  $f(x) = \frac{1-x}{1+x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$ .

- (a) Számítsuk ki  $f'(x)$ -et.
- (b) Mennyi az  $x_0 = 1$  pontban az érintő iránytangense?
- (c) Írjuk fel az  $x_0 = 1$  abszcisszájú pontban az érintőegyenes egyenletét.

### 3. feladat

Legyen  $f(x) = \frac{1-x}{1+x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$ .

- (a) Számítsuk ki  $f'(x)$ -et.
- (b) Mennyi az  $x_0 = 1$  pontban az érintő iránytangense?
- (c) Írjuk fel az  $x_0 = 1$  abszcisszájú pontban az érintőegyenes egyenletét.
- (a) A hányados deriválási szabályával:

$$f'(x) = \frac{(-1) \cdot (1+x) - (1-x) \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2}.$$

### 3. feladat

Legyen  $f(x) = \frac{1-x}{1+x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$ .

(a) Számítsuk ki  $f'(x)$ -et.

(b) Mennyi az  $x_0 = 1$  pontban az érintő iránytangense?

(c) Írjuk fel az  $x_0 = 1$  abszcisszájú pontban az érintőegyenes egyenletét.

(a) A hányados deriválási szabályával:

$$f'(x) = \frac{(-1) \cdot (1+x) - (1-x) \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2}.$$

(b) Az érintő iránytangense a meredeksége, ami a derivált értékével egyezik meg:

$$f'(1) = \frac{-2}{(1+1)^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

### 3. feladat

Legyen  $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$  ( $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ).

(a) Számítsuk ki  $f'(x)$ -et.

(b) Mennyi az  $x_0 = 1$  pontban az érintő iránytangense?

(c) Írjuk fel az  $x_0 = 1$  abszcisszájú pontban az érintőegyenes egyenletét.

(a) A hányados deriválási szabályával:

$$f'(x) = \frac{(-1) \cdot (1+x) - (1-x) \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2}.$$

(b) Az érintő iránytangense a meredeksége, ami a derivált értékével egyezik meg:

$$f'(1) = \frac{-2}{(1+1)^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

(c) Az  $x_0$ -beli érintőegyenes egyenlete:  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ , ami a jelen esetben (mivel  $f(1) = 0$ ):  $y = -\frac{1}{2}(x - 1) + 0$ , azaz  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ .

### 3. feladat (d)

Legyen  $f(x) = \frac{1-x}{1+x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$ .

Van-e olyan pontja a grafikonnak, ahol az érintő vízszintes?

### 3. feladat (d)

Legyen  $f(x) = \frac{1-x}{1+x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$ .

Van-e olyan pontja a grafikonnak, ahol az érintő vízszintes?

Ha az érintő vízszintes, akkor a meredéksége 0, azaz  $f'(x) = 0$ , ami a jelen esetben a

$$\frac{-2}{(1+x)^2} = 0$$

egyenletre vezet, de ez soha nem teljesül, mert egy tört pontosan akkor 0, ha a számlálója 0.

## Opcionális feladat

A definíció alapján számítsuk ki az

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} \quad (x \in [1, +\infty))$$

függvény deriváltját ott, ahol létezik.



# Házi feladatok

1. Számítsuk ki az alábbi függvények deriváltjait.

(a)  $f(x) = x^2 \sin x$

(b)  $f(x) = \frac{x^3}{\ln x}$

(c)  $f(x) = \frac{(x+5)\operatorname{sh} x}{12}$

2. Írjuk fel az  $f(x) = \arccos(x)$  függvény  $x_0 = \frac{1}{2}$  pontjához tartozó érintő egyenletét.

# Házi feladatok megoldása

1. (a)  $f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$

(b)  $f'(x) = \frac{3x^2 \ln x - x^2}{(\ln x)^2}$

(c)  $f'(x) = \frac{\operatorname{sh} x - (x + 5)\operatorname{ch} x}{12}$

2.

$$y = -\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{3}$$