7. gyakorlat
Monotonitás és szélsőértékek

1. Adjuk meg azt a legbővebb intervallumot, amelyen az

$$f(x) = \frac{x^3}{3x^2+1} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény szigorúan monoton.

2. Határozzuk meg az

$$f(x) = x - \ln(1+x) \qquad \big(x \in (-1, +\infty)\big)$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit és lokális szélsőértékeit.

3. Határozzuk meg az

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény monotonitási intervallumait, valamint lokális szélsőértékhelyeit és lokális szélsőértékeit.

4. Határozzuk meg az

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1 \qquad (x \in [-1, 5])$$

függvény abszolút maximumát és minimumát (ha azok léteznek), és mondjuk meg azt is, hogy hol veszi fel a szélsőértékeket.

5. Határozzuk meg az

$$f(x) = 2x + \frac{200}{x} \qquad (0 < x < +\infty)$$

függvény abszolút maximumát és minimumát (ha azok léteznek), és mondjuk meg azt is, hogy hol veszi fel a szélsőértékeket.

6. Magyarországon a teljes lakosság 1 év alatt összesen 10^{13} forintnyi jövedelmet kap. Tudjuk, hogy ha a keresetek $(100y)$%-át kellene jövedelemadóként befizetni, akkor a lakosság a befizetendő adó $(100y^3)$%-át elcsalná (nem fizetné be). Ilyen feltételek mellett mekkorára kellene az adókulcsot állítani, hogy a lehető legtöbb pénz folyjon be?

Opcionális (ha marad idő)

7. Legyen

$$f(x) = \left(x - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos x + x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{3x}{2}\right) \qquad \left(x \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Írjuk fel a függvény derivált függvényét. Ennek felhasználásával mutassuk meg, hogy az $f(x) = 0$ egyenletnek pontosan egy gyöke van a $(0, \frac{\pi}{6})$ intervallumban.

8. Egy hajó üzemeltetési költségeit a fűtőanyag-fogyasztás és egyéb kiadások képezik. Az óránként felhasznált fűtőanyag A értéke függ a sebességtől; az összefüggést az $A = 0{,}03v^3$ képlet fejezi ki, ahol v (km/h) a sebesség; az egyéb kiadások B forintot tesznek ki (óránként). Határozzuk meg, milyen sebességgel haladjon a hajó, hogy a kilométerenkénti költség a lehető legkisebb legyen. (Vegyük B-t pl. 480 Ft-nak).

Házi feladatok

9. Andri mézeskalácsot árul az adventi vásárban. Ha az előállításra x petákot költ, akkor darabját $6\sqrt{x}$ petákért tudja eladni. Mennyit költsön az előállításra, hogy a darabonkénti haszna maximális legyen?

10. Gabi mézeskalácsot árul az adventi vásárban. Ha x petákért adja darabját, akkor az előtte elsétálók $(60 - 3x)$ százaléka vesz tőle egyet. Mennyiért adja darabját, hogy a bevétele maximális legyen? (Feltehetjük, hogy 1000 vásárló halad el előtte, de ennek nincs jelentősége.)