

9. gyakorlat

Teljes függvényvizsgálat

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2023. november 9.

Függvényvizsgálat

Adott egy $f(x)$ függvény, megállapítjuk:

- ▶ értelmezési tartomány (ÉT)
- ▶ zérushely
- ▶ paritás
- ▶ periodicitás
- ▶ értelmezési tartomány szélein határértékek
 - ▶ aszimptoták
- ▶ első derivált
 - ▶ monotonitási tulajdonságok
 - ▶ lokális szélsőértékek
- ▶ második derivált
 - ▶ konvexitás
 - ▶ inflexiós pontok
- ▶ szemantikusan ábrázolás
- ▶ értékkészlet (ÉK)

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2$$

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2$$

ÉT: \mathbb{R}

zérushely: ezt ennél a függvénynél kivételesen nem vizsgáljuk

paritás: nincs $f(1) = -11$ és $f(-1) = -3$: nem egyenlőek, ellentettek

periódus: nincs (polinom, és így a végtelenben végtelenbe tart, ami nem lehet egy periodikus függvénynél)

határértékek:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2 = \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 \left(3 - \frac{4}{x} - \frac{12}{x^2} + \frac{2}{x^4} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \left(3 - \frac{4}{x} - \frac{12}{x^2} + \frac{2}{x^4} \right) = +\infty$$

Ferde aszimptota lehetne, de

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 3x^3 - 4x^2 - 12x + \frac{2}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(3 - \frac{4}{x} - \frac{12}{x^2} + \frac{2}{x^4} \right) = +\infty \end{aligned}$$

mutatja, hogy nincsen. Hasonlóan a $-\infty$ -ben sincs.

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2$$

$$f'(x) = 3 \cdot 4x^3 - 4 \cdot 3x^2 - 12 \cdot 2x = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2)$$

$$f''(x) = 12 \cdot 3x^2 - 12 \cdot 2x - 24 = 36x^2 - 24x - 24$$

első derivált nullhelyei: 0, 2, -1

második derivált nullhelyei: $\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{7}}{3}$,

legyen $a = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{7}}{3} \approx -0,55$ és $b = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3} \approx 1,22$

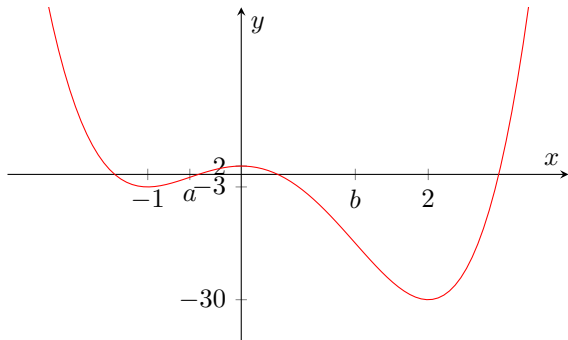
	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, a)$	a	$(a, 0)$	0	$(0, b)$	b	$(b, 2)$	2	$(2, +\infty)$
f'	-	0	+		0	-	-		0	+	
	mon. csök.	min.	mon. nő		max.	mon. csök.		min.	mon. nő		
f''	+			0	-		0	+			
	konvex			i. p.	konkáv		i. p.	konvex			

lokális minimumok: $f(-1) = -3$ és $f(2) = -30$

lokális maximum: $f(0) = 2$

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2$$

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, a)$	a	$(a, 0)$	0	$(0, b)$	b	$(b, 2)$	2	$(2, +\infty)$
f'	-	0	+		0	-	-		0	+	
	mon. csök.	min.	mon. nő		max.	mon. csök.		min.	mon. nő		
f''	+		0	-	0	+					
	konvex		i. p.	konkáv		i. p.		konvex			



ÉK: $[-30, +\infty)$

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2 - x}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2 - x}$$

ÉT: $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

zérushely: $x^2 - 3 = 0$, azaz $x = \pm\sqrt{3}$

paritás: nincs (pl. az értelmezési tartomány miatt)

periódus: nincs (pl. a zérushelyek miatt)

határértékek:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 3}{2 - x} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{2 - x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 3}{2 - x} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{2 - x} = +\infty$$

Az $x = 2$ -ben függőleges aszimptota van.

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2 - x}$$

határértékek a végtelenben:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3}{2 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \frac{3}{x}}{\frac{2}{x} - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3}{2 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \frac{3}{x}}{\frac{2}{x} - 1} = +\infty$$

Nézzük meg, hogy a végtelenben van-e ferde aszimptota:

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - 3}{2 - x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3}{2x - x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{3}{x^2}}{\frac{2}{x} - 1} = -1$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3}{2 - x} + x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3 + 2x - x^2}{2 - x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 3}{2 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{x}}{\frac{2}{x} - 1} = -2 \end{aligned}$$

Tehát az aszimptota egyenlete a $+\infty$ -ben $y = -x - 2$.

Hasonló számolással kapjuk, hogy a $-\infty$ -ben is ez az aszimptota.

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2 - x}$$

$$f'(x) = \frac{2x(2-x) - (x^2-3) \cdot (-1)}{(2-x)^2} = \frac{-x^2 + 4x - 3}{(2-x)^2}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(-2x+4) \cdot (2-x)^2 - (-x^2+4x-3) \cdot 2(2-x) \cdot (-1)}{(2-x)^4} = \\ &= \frac{(-2x+4) \cdot (2-x) + 2(-x^2+4x-3)}{(2-x)^3} = \frac{2}{(2-x)^3} \end{aligned}$$

Az első derivált nullhelyei 1, 3, míg a másodiknak nincs.

	$x < 1$	1	$1 < x < 2$	2	$2 < x < 3$	3	$3 < x$
f'	-	0	+	n. é.	+	0	-
	mon. csök.	min.	mon. nő	n. é.	mon. nő	max.	mon. csök.
f''	+			n. é.	-		
	konvex			n. é.	konkáv		

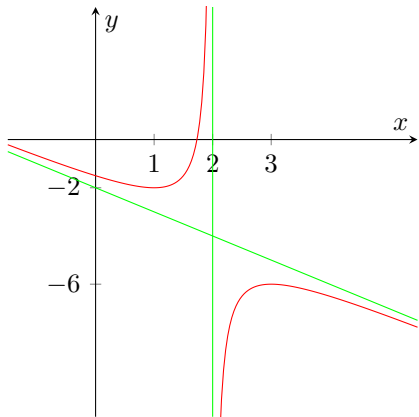
lokális minimum: $f(1) = -2$

lokális maximum: $f(3) = -6$

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2 - x}$$

	$x < 1$	1	$1 < x < 2$	2	$2 < x < 3$	3	$3 < x$
f'	-	0	+	n. é.	+	0	-
	mon. csök.	min.	mon. nő	n. é.	mon. nő	max.	mon. csök. lokális
f''	+			n. é.	-		
	konvex			n. é.	konkáv		

minimum: $f(1) = -2$, lokális maximum: $f(3) = -6$



ÉK: $(-\infty, -6] \cup [-2, +\infty)$

$$f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$

ÉT: \mathbb{R} ($1 + e^x > 0$).

zérushely: nincs ($e^x \neq 0$)

paritás: nincs ($f(1) \approx 0,73$, $f(-1) \approx 0,27$)

periódus: nincs (pl. látni fogjuk, hogy monoton nő)

határértékek:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{e^x} + 1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{0}{1+0} = 0, \text{ mert } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

Tehát a függvénynek vízszintes aszimptotái vannak:

a $+\infty$ -ben az $y = 1$ egyenes

a $-\infty$ -ben az $y = 0$ egyenes

$$f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^x \cdot e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

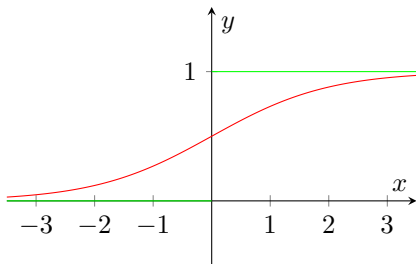
$$f''(x) = \frac{e^x(1+e^x)^2 - e^x \cdot 2(1+e^x)e^x}{(1+e^x)^4} = \frac{e^x(1+e^x) - e^x \cdot 2e^x}{(1+e^x)^3} = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$$

az első derivált mindenütt pozitív

a második $e^x = 1$, azaz $x = 0$ esetén 0

	$x < 0$	0	$0 < x$
f'		+	
	monoton nő		
f''	+	0	-
	konvex	i. p.	konkáv

ÉK: (0, 1)



Házi feladatok

Az alábbi függvényeken végezzünk teljes függvényvizsgálatot:

1. $f(x) = \frac{x}{x+1}$,

2. $f(x) = \ln(x^2 - 1)$.

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

ÉT: $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

zérushely: $x = 0$.

paritás: nincs (pl. ÉT miatt)

periodicitás nincs (pl. ÉT miatt)

határértékek:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1$$

Így $y = 1$ vízszintes aszimptota a $\pm\infty$ -ben.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{x+1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x+1} = -\infty$$

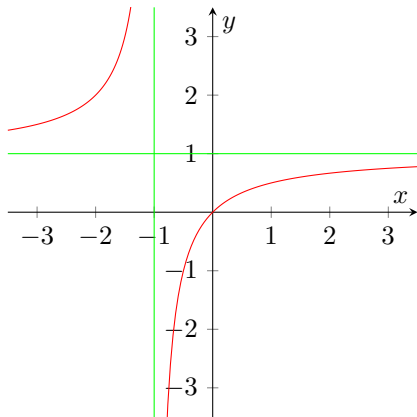
Így $x = -1$ függőleges aszimptota.

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x+1) - x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{(x+1)^3}$$

	$x < -1$	-1	$-1 < x$
f'	+	n.é.	+
f	nő	n.é.	nő
f''	+	n.é.	-
f	konvex	n.é.	konkáv



ÉK: $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$f(x) = \ln(x^2 - 1)$$

ÉT: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

zérushely: $\pm\sqrt{2}$.

paritás: páros:

$$f(-x) = \ln((-x)^2 - 1) = \ln(x^2 - 1) = f(x)$$

Így elegendő csak $1 < x$ esett vizsgálni.

periodicitás: nincs (pl. zérushely miatt)

határérték:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 - 1) = +\infty$$

Ferde aszimptota (L'Hospital-szabály alkalmazásával):

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - 1)}{x} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{x^2 - 1}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x - \frac{1}{x}} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

így nincsen. A párosság miatt ugyanez a helyzet a $(-\infty)$ -ben is.

$$f(x) = \ln(x^2 - 1)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$$f''(x) = \frac{2 \cdot (x^2 - 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x^2 - 2}{(x^2 - 1)^2}$$

	$x < -1$	$-1 \leq x \leq 1$	$1 < x$
f'	-	n.é.	+
f	csökken	n.é.	nő
f''	-	n.é.	-
f	konkáv	n.é.	konkáv

