2. vizsga végeredményei

4. szigorúan monoton csökken

5. (c)

6. A függvény folytonos, ha $x \neq \pm 2$. Ezekben a pontokban a határérték:

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-4} = \lim_{x\to -2} \frac{20}{x^2-4} \text{ nem létezik, de}$$

$$\lim_{x\to -2-} f(x) = \lim_{x\to -2-} \frac{20}{x^2-4} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -2+} f(x) = \lim_{x\to -2+} \frac{20}{x^2-4} = -\infty$$

$$\lim_{x\to +2} f(x) = \lim_{x\to +2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-4} = \lim_{x\to +2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to +2} \frac{x-3}{x+2} = -\frac{1}{4} \neq f(2)$$

A -2-ben szinguláris szakadás, míg $+2$-ben megszüntethető szakadás van.

7. Az $f(x) = x\left(1-\frac{x}{100}\right) = x - \frac{x^2}{100}$ függvény maximumát keressük:
$f'(x) = 1 - \frac{2x}{100}$, mely $x = 50$-ben tűnik el.
Ez lokális maximum, hiszen a második derivált: $f''(x) = -\frac{2}{100}$ negatív.
A függvénynek $0 \le x \le 100$ esetén van értelme, a széleken a függvény:
$f(0) = f(100) = 0$, tehát a lokális maximum globális is.
A függvény értéke: $f(50) = 50\left(1-\frac{50}{100}\right) = 25$, így legfeljebb 25 fát adhatunk el.

8. ÉT: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, zérushely nincs, páratlan, nem periodikus.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, $y = x$ ferde aszimptota $\pm\infty$-ben.

$\lim\limits_{x\to 0\pm} f(x) = \pm\infty$, így $x = 0$ függőleges aszimptota.

$$f'(x) = \frac{x^2-5}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{10}{x^3}$$

	$(-\infty,-\sqrt{5})$	$-\sqrt{5}$	$(-\sqrt{5},0)$	0	$(0,\sqrt{5})$	$\sqrt{5}$	$(\sqrt{5},+\infty)$
f'	+	0	−	n. é.	−	0	+
f	↗	max	↘	n. é.	↘	min	↗
f''		−		n. é.		+	
f		⌢		n. é.		⌣	

ÉK: $\left(-\infty, -2\sqrt{5}\right] \cup \left[2\sqrt{5}, +\infty\right)$.

9. $$\int \frac{(x+\sqrt{x})^2}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2+2x\sqrt{x}+x}{x}\,\mathrm{d}x = \int x + 2\sqrt{x} + 1\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + x + C$$

10. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}{(\cos x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{3}} (\operatorname{tg} x)'\,\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{4}(\operatorname{tg} x)^{\frac{4}{3}}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{4}$$

11. A két görbe metszéspontja a $7 - x^2 = 5 - x$ egyenlet megoldásai, azaz $x_1 = -1$ és $x_2 = 2$. E két határ között integráljuk a két függvény különbségét:

$$\int_{-1}^{2} (7-x^2) - (5-x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} 2 + x - x^2\,\mathrm{d}x = \left[2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \frac{10}{3} - \left(-\frac{7}{6}\right) = \frac{9}{2}$$