# 2. előadás

## Másodfajú improprius integrál

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet, Geometria Tanszék

2023. február 28.

# Bevezetés

A határozott integrálnál feltettük, hogy a függvény korlátos.

De erre nem feltétlenül van szükség, ha határértéket számolunk.

Például: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ függvény nem korlátos a $(0,1]$ intervallumon, de bármilyen $0 < a < 1$ esetén az $[a,1]$ intervallumon már korlátos, tehát tudjuk integrálni:

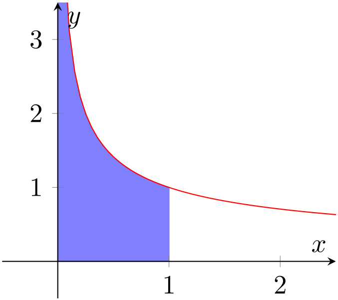
$$\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_a^1 x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_a^1 = \left[2\sqrt{x}\right]_a^1 = 2 - 2\sqrt{a}$$

Nézzük meg, hogy mi a határérték, ha $a$ nullához tart (jobbról):

$$\lim_{a\to 0+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0+} \left(2 - 2\sqrt{a}\right) = 2$$

Ez a határérték létezik és véges, így legyen

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2$$



# Másodfajú improprius integrál

Korlátos intervallumon integrálunk egy nem korlátos függvényt, azaz:

Ha az $f$ függvény az $[a_0, b_0]$ intervallumon nem korlátos, de

minden $[a, b_0]$ $(a_0 < a < b_0)$ intervallumban korlátos és integrálható, és a

$$\lim_{a \to a_0+} \int_a^{b_0} f(x)\ \mathrm{d}x$$

minden $[a_0, b]$ $(a_0 < b < b_0)$ intervallumban korlátos és integrálható, és a

$$\lim_{b \to b_0-} \int_{a_0}^{b} f(x)\ \mathrm{d}x$$

határérték létezik és véges, akkor ez a szám az

$$\int_{a_0}^{b_0} f(x)\ \mathrm{d}x$$

improprius integrál. Ekkor konvergens az improprius integrál.
Ha a határérték nem létezik vagy végtelen, akkor az improprius integrál divergens.

Példa:
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ a $[0, 1]$ intervallumon:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x = \lim_{a \to 0+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x = 2$$

# Egy másik példa

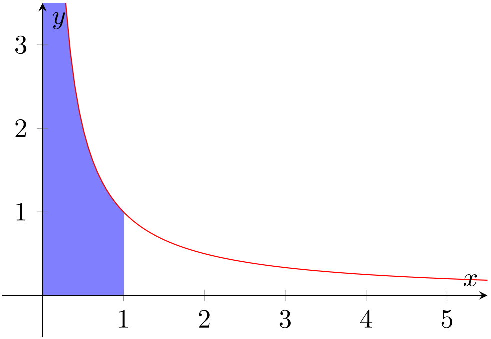
Integráljuk az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ függvényt a $[0, 1]$ intervallumon:

# Egy másik példa

Integráljuk az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ függvényt a $[0,1]$ intervallumon:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0+} \int_a^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0+} [\ln x]_a^1 = \lim_{a\to 0+} (\ln 1 - \ln a) = +\infty$$

Így ez az improprius integrál divergens.



# Az $\frac{1}{x^p}$ általában

Konvergens vagy divergens az $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ improprius integrál ($p \in \mathbb{R}$)?

# Az $\frac{1}{x^p}$ általában

Konvergens vagy divergens az $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ improprius integrál ($p \in \mathbb{R}$)?

A $p = 1$ esetén divergens (előző dia), míg $p \neq 1$ esetén:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0+} \int_a^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0+} \int_a^1 x^{-p}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0+} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_a^1 =$$

$$= \lim_{a\to 0+} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_a^1 = \lim_{a\to 0+} \left(\frac{1}{1-p} - \frac{a^{1-p}}{1-p}\right)$$

Felhasználjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0+} x^q = \begin{cases} 0, & \text{ha } q > 0 \\ 1, & \text{ha } q = 0 \\ +\infty, & \text{ha } q < 0 \end{cases}$$

Így $1 - p > 0$, azaz $1 > p$ esetén az improprius integrál konvergens, és az értéke:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0+} \left(\frac{1}{1-p} - \frac{a^{1-p}}{1-p}\right) = \frac{1}{1-p}$$

($p = 1$ esetén is divergens)
Ha $1 - p < 0$, azaz $1 < p$, akkor divergens az improprius integrál.

# Egy feladat

Konvergens vagy divergens az $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$ integrál?

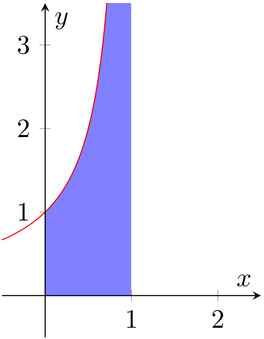
# Egy feladat

Konvergens vagy divergens az $\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$ integrál?

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to 1-} \int_0^b \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to 1-} \left[-\ln(1-x)\right]_0^b =$$
$$= \lim_{b\to 1-} -\ln(1-b) - 0 = +\infty$$

Felhasználtuk, hogy

$$(\ln(1-x))' = -\frac{1}{1-x}$$




Tehát ez az improprius integrál divergens.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \,?$$

## $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, \mathrm{d}x = ?$

Az intervallum mindkét végén végtelenbe tart a függvény, így kettévágjuk:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, \mathrm{d}x$$

Az első integrál:

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, \mathrm{d}x = \lim_{a\to-1+} \int_{a}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, \mathrm{d}x = \lim_{a\to-1+} [\arcsin(x)]_a^0 =$$
$$= \lim_{a\to-1+} (0 - \arcsin(a)) = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Hasonlóan számolhatjuk a második integrált:

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, \mathrm{d}x = \lim_{b\to1-} \int_{0}^{b} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, \mathrm{d}x = \lim_{b\to1-} [\arcsin(x)]_0^b =$$
$$= \lim_{b\to1-} \arcsin(b) - 0 = \frac{\pi}{2}$$

Az eredeti integrál:

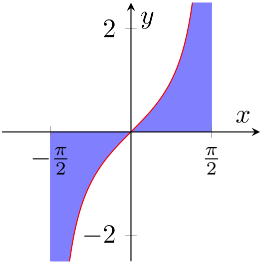
$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

# Itt is van veszély!

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \ \mathrm{d}x = ?$$

# Itt is van veszély!

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \ \mathrm{d}x = ?$$




Az intervallum mindkét végén végtelenbe tart a függvény, így ketté kell vágni:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x$$

Az első:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \operatorname{tg} x \ \mathrm{d}x = \lim_{a \to -\frac{\pi}{2}+} \int_{a}^{0} \operatorname{tg} x \ \mathrm{d}x = \lim_{a \to -\frac{\pi}{2}+} [-\ln(\cos x)]_a^0 =$$

$$= \lim_{a \to -\frac{\pi}{2}+} (-\ln 1 - (-\ln(\cos a))) = \lim_{a \to -\frac{\pi}{2}+} \ln(\cos a) = -\infty$$

Így az improprius integrál divergens, a másik tagot ki sem kell számolni.

Nem lehet ezt a következő módon számolni:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \ \mathrm{d}x \neq \lim_{a \to \frac{\pi}{2}-} \int_{-a}^{a} \operatorname{tg} x \ \mathrm{d}x = \lim_{a \to \frac{\pi}{2}-} [-\ln(\cos x)]_{-a}^{a} = \lim_{a \to \frac{\pi}{2}-} 0 = 0$$