4. előadás

Síkok és egyenesek egyenlete

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet, Geometria Tanszék

2023. március 7.

Síkok egyenlete

Adott egy $\mathbf{n}(a, b, c)$ térbeli vektor.
Melyek azok a $\mathbf{v}(x, y, z)$ vektorok, amelyek merőlegesek rá?

Két vektor pontosan akkor merőleges, ha a skaláris szorzatuk nulla:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0 \iff ax + by + cz = 0$$

Ez az $\mathbf{n}$ normálvektorra merőleges, origón átmenő sík egyenlete $(a, b, c \in \mathbb{R})$.

Példa:
Az $\mathbf{n}(2, -3, 1)$ normálvektorra merőleges, origón átmenő sík egyenlete:

$$2x - 3y + z = 0$$

A sík egyenlete általános esetben (tehát ha nem feltétlenül megy át az origón):

$$ax + by + cz = d$$

Példa:
Ha az $\mathbf{n}(2, -3, 1)$ normálvektorú sík átmegy a $P(1, 3, 5)$ ponton, akkor úgy kell megválasztani a d-t, hogy P-re teljesüljön az egyenlet $(2 \cdot 1 - 3 \cdot 3 + 5 = -2)$:

$$2x - 3y + z = -2$$

Hesse-féle normálegyenlet

Az $ax + by + cz = d$ egyenletű sík Hesse-féle normálegyenlete:

$$\frac{ax + by + cz - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0$$

A bal oldal megadja az (x, y, z) koordinátájú pont (előjeles) távolságát a síktól.

Példa:
A $Q(1, 3, 2)$ pont távolsága a $P(2, 1, 5)$ ponton átmenő, $\mathbf{n}(3, 1, -1)$ normálvektorú síktól.

Hesse-féle normálegyenlet

Az $ax + by + cz = d$ egyenletű sík Hesse-féle normálegyenlete:

$$\frac{ax + by + cz - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0$$

A bal oldal megadja az (x, y, z) koordinátájú pont (előjeles) távolságát a síktól.

Példa:
A $Q(1, 3, 2)$ pont távolsága a $P(2, 1, 5)$ ponton átmenő, $\mathbf{n}(3, 1, -1)$ normálvektorú síktól.
A sík egyenlete:

$$3x + y - z = 2$$

A sík Hesse-féle normálegyenlete:

$$\frac{3x + y - z - 2}{\sqrt{11}} = 0$$

A bal oldali kifejezésbe a Q koordinátáit helyettesítve:

$$\frac{3 \cdot 1 + 3 - 2 - 2}{\sqrt{11}} = \frac{2}{\sqrt{11}} \approx 0{,}603$$

Két vektor által meghatározott sík

Hogyan tudjuk felírni két vektor által meghatározott sík egyenletét?

Egy olyan vektort keresünk, mely az általuk meghatározott síkra, azaz mindkettőre merőleges. A vektoriális szorzatuk pont ilyen. Ennek segítségével fel tudjuk írni a sík egyenletét.

Példa:
$\mathbf{v}_1(1, 3, 2)$ és $\mathbf{v}_2(0, 2, 1)$ által meghatározott sík egyenlete

Két vektor által meghatározott sík

Hogyan tudjuk felírni két vektor által meghatározott sík egyenletét?

Egy olyan vektort keresünk, mely az általuk meghatározott síkra, azaz mindkettőre merőleges. A vektoriális szorzatuk pont ilyen. Ennek segítségével fel tudjuk írni a sík egyenletét.

Példa:
$\mathbf{v}_1(1,3,2)$ és $\mathbf{v}_2(0,2,1)$ által meghatározott sík egyenlete

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (3 \cdot 1 - 2 \cdot 2, 2 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 2 - 3 \cdot 0) = (-1,-1,2)$$

Így a sík egyenlete: $-x - y + 2z = 0$.

Mi a $\mathbf{v}_1(1,3,2)$ és $\mathbf{v}_2(0,2,1)$ vektorokkal párhuzamos, a $Q(3,7,1)$ ponton átmenő sík egyenlete?

Két vektor által meghatározott sík

Hogyan tudjuk felírni két vektor által meghatározott sík egyenletét?

Egy olyan vektort keresünk, mely az általuk meghatározott síkra, azaz mindkettőre merőleges. A vektoriális szorzatuk pont ilyen. Ennek segítségével fel tudjuk írni a sík egyenletét.

Példa:
$\mathbf{v}_1(1,3,2)$ és $\mathbf{v}_2(0,2,1)$ által meghatározott sík egyenlete

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (3 \cdot 1 - 2 \cdot 2, 2 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 2 - 3 \cdot 0) = (-1,-1,2)$$

Így a sík egyenlete: $-x - y + 2z = 0$.

Mi a $\mathbf{v}_1(1,3,2)$ és $\mathbf{v}_2(0,2,1)$ vektorokkal párhuzamos, a $Q(3,7,1)$ ponton átmenő sík egyenlete?
$d = -3 - 7 + 2 \cdot 1 = -8$, így a sík egyenlete:

$$-x - y + 2z = -8$$

Két sík hajlásszöge

Hogyan határozhatjuk meg két sík hajlásszögét?

Ez a szög megegyezik a normálvektoraik által bezárt szöggel, így elég azt kiszámolni.

Példa:

$$\left.\begin{aligned} x - 2y - 3z &= 6 \\ 2x + 5z &= 7 \end{aligned}\right\} \text{ síkok hajlásszöge}$$

Két sík hajlásszöge

Hogyan határozhatjuk meg két sík hajlásszögét?

Ez a szög megegyezik a normálvektoraik által bezárt szöggel, így elég azt kiszámolni.

Példa:

$$\left.\begin{aligned} x - 2y - 3z &= 6 \\ 2x + 5z &= 7 \end{aligned}\right\} \text{ síkok hajlásszöge}$$

Először az egyenletekből leolvassuk a normálvektorokat:

$$\begin{aligned} x - 2y - 3z = 6 \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{n}_1 = (1, -2, -3) \\ 2x + 5z = 7 \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{n}_2 = (2, 0, 5) \end{aligned}$$

A bezárt szögük:

$$\begin{aligned} \varphi = \arccos\left(\frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|}\right) = \arccos\left(\frac{2 + 0 - 15}{\sqrt{1+4+9} \cdot \sqrt{4+25}}\right) = \\ = \arccos\left(-\frac{13}{\sqrt{406}}\right) \approx 130{,}1^\circ \end{aligned}$$

Két sík hajlásszöge 0° és 90° közötti érték, így ennek a kiegészítő szöge, azaz $49{,}9^\circ$ a hajlásszög.

Egyenesek a síkon

Egyenes egyenlete a síkon:

$$y = ax + b \quad (a, b \in \mathbb{R}) \qquad \text{vagy} \qquad x = c \quad (c \in \mathbb{R})$$

általánosan:

$$ax + by = c \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Hesse-féle normálalak:

$$\frac{ax + by - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$$

A $Q(x_0, y_0)$ pont távolsága az egyenestől:

$$\left| \frac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

Példa:
A $Q(2, 3)$ pont távolsága az $y = 2x + 1$ egyenestől.

Egyenesek a síkon

Egyenes egyenlete a síkon:

$$y = ax + b \quad (a, b \in \mathbb{R}) \qquad \text{vagy} \qquad x = c \quad (c \in \mathbb{R})$$

általánosan:

$$ax + by = c \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Hesse-féle normálalak:

$$\frac{ax + by - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$$

A $Q(x_0, y_0)$ pont távolsága az egyenestől:

$$\left| \frac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

Példa:
A $Q(2, 3)$ pont távolsága az $y = 2x + 1$ egyenestől.
Az egyenes egyenlete átrendezve: $-2x + y = 1$, így a Hesse-féle normálalakja:

$$\frac{-2x + y - 1}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = 0$$

Így a Q pont távolsága: $\left| \dfrac{-2 \cdot 2 + 3 - 1}{\sqrt{5}} \right| = \left| \dfrac{-2}{\sqrt{5}} \right| = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \approx 0{,}89$

Egyenesek a térben

Az $A(x_1, y_1, z_1)$ és a $B(x_2, y_2, z_2)$ ponton átmenő egyenes:

irányvektora: $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

Az egyenes pontjai ($\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$):

$$\begin{aligned}\mathbf{a} + t\overrightarrow{AB} &= (x_1, y_1, z_1) + t(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = \\ &= (x_1 + t(x_2 - x_1), y_1 + t(y_2 - y_1), z_1 + t(z_2 - z_1))\end{aligned}$$

Másképpen:

A $P(x_0, y_0, z_0)$ ponton átmenő, $\mathbf{v}(v_1, v_2, v_3)$ irányvektorú egyenes pontjai:

$$\{\mathbf{p} + t\mathbf{v} = (x_0, y_0, z_0) + t(v_1, v_2, v_3) = (x_0 + tv_1, y_0 + tv_2, z_0 + tv_3) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Ezt nevezzük az egyenes paraméteres megadásának.

$$\left.\begin{aligned} x = x_0 + tv_1 \quad &\Rightarrow \quad t = \frac{x - x_0}{v_1} \\ y = y_0 + tv_2 \quad &\Rightarrow \quad t = \frac{y - y_0}{v_2} \\ z = z_0 + tv_3 \quad &\Rightarrow \quad t = \frac{z - z_0}{v_3} \end{aligned}\right\} \frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

Ez az egyenes egyenletrendszere.

Példa

Az $A(1, 3, -5)$ és a $B(2, 0, -1)$ ponton átmenő egyenes egyenletrendszere.

Példa

Az $A(1,3,-5)$ és a $B(2,0,-1)$ ponton átmenő egyenes egyenletrendszere.

irányvektor: $\overrightarrow{AB} = (1,-3,4)$

paraméteres egyenlete:

$$\{(1+t, 3-3t, -5+4t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

egyenletrendszere:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z+5}{4}$$

Fordított példa

És fordítva:

$$\frac{x-2}{3} = -\frac{y}{3} = \frac{1-z}{2}$$

melyik egyenest határozza meg?

Fordított példa

És fordítva:

$$\frac{x-2}{3} = -\frac{y}{3} = \frac{1-z}{2}$$

melyik egyenest határozza meg?

Kicsit átalakítjuk:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-0}{-3} = \frac{z-1}{-2}$$

Az irányvektor: $(3, -3, -2)$ és a $(2, 0, 1)$ ponton megy át.

Azt is mondhatjuk, hogy a $(2, 0, 1)$ és $(5, -3, -1)$ ponton átmenő egyenes.

Egy elfajuló eset

Hogyan írjuk fel az egyenes egyenletét, ha az irányvektor egyik koordinátája nulla?

Például $\mathbf{v} = (1, 0, 5)$ irányvektorú, $P(2, 4, 6)$ ponton átmenő egyenes egyenlete:

- paraméteres egyenlete:

$$\{(2 + t, 4, 6 + 5t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

- egyenletrendszere:

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{z - 6}{5} \quad \text{és} \quad y = 4$$

Két sík metszésvonala

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 2y - z = 7 \\ x + 3y + 3z = 6 \end{array}\right\} \text{ síkok metszésvonalának megadása}$$

Két sík metszésvonala

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 2y - z = 7 \\ x + 3y + 3z = 6 \end{array}\right\} \text{ síkok metszésvonalának megadása}$$

A keresett egyenes irányvektora párhuzamos mindkét síkkal, így merőleges a normálvektorokra:

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = (2, -2, -1) \times (1, 3, 3) = (-3, -7, 8)$$

Kell keresni még egy metszéspontot is.
Ehhez feltehetjük, hogy pl. $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{r} -2y - z = 7 \\ 3y + 3z = 6 \end{array}\right\} - 3y = 27 \Rightarrow y = -9 \Rightarrow z = 11$$

Tehát $(0, -9, 11)$ egy metszéspont. Így a metszésvonal paraméteres megadása:

$$\{(-3t, -9 - 7t, 11 + 8t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

És az egyenletrendszere:

$$\frac{x}{-3} = \frac{y + 9}{-7} = \frac{z - 11}{8}$$