8. előadás

Mátrixok rangja

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet, Geometria Tanszék

2023. március 21.

Példa

Lineárisan függetlenek-e a $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ 9 \end{bmatrix}$ vektorok?

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \overset{?}{\Longrightarrow} \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Példa

Lineárisan függetlenek-e a $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ 9 \end{bmatrix}$ vektorok?

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \lambda_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \overset{?}{\Longrightarrow} \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_1 + 6\lambda_2 + 10\lambda_3 &= 0 \\ 4\lambda_1 + 8\lambda_2 + 9\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 10 & 0 \\ 4 & 8 & 9 & 0 \end{array}\right] \underset{s_3-4s_1}{\overset{s_2-3s_1}{\sim}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right] \overset{s_3+3s_2}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{s_1-3s_2}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Azon változók lesznek szabad paraméterek, melyeknek megfelelő oszlopban nincs vezéregyes. Jelen esetben λ_2 szabad paraméter, és $\lambda_1 = -2\lambda_2$, $\lambda_3 = 0$. Egy megoldás: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$.

Vektorrendszer rangja

Hány lineárisan független vektor választható ki az alábbiak közül?

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Ahány vezéregyest kaptunk a Gauss-elimináció során:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 10 \\ 4 & 8 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jelen esetben kettőt.

A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ n dimenziós vektorokból álló vektorrendszer rangja a belőlük kiválasztható lineárisan független vektorok maximális száma.

Példa:

a $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ 9 \end{bmatrix}$ vektorrendszer rangja 2.

Mátrix rangja

Egy $\mathbf{A}$ mátrix rangja az oszlopaiból álló vektorrendszer rangja, azaz az oszlopaiból kiválasztható lineárisan független vektorok maximális száma.
Jelölés: $r(\mathbf{A})$.

Tétel:
Egy mátrix rangja a soraiból mint sorvektorokból kiválasztható lineárisan független vektorok maximális száma.

Következmény:

- $r(\mathbf{A}) = r\left(\mathbf{A}^\top\right)$
- $r(\mathbf{A}) \leq \min(m, k)$, ha $\mathbf{A}$ típusa $m \times k$.

Lineáris egyenletrendszerek mátrixrangos vizsgálata

Kronecker–Capelli-tétel (vagy Rouché–Capelli-tétel, stb.):

Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$.

Ha az $r(\mathbf{A})$ megegyezik az ismeretlenek n számával, akkor a megoldás egyértelmű.

Ha az $r(\mathbf{A}) < n$, akkor $n - r(\mathbf{A})$ ismeretlen tetszőlegesen megválasztható (szabad paraméter).

Rang kiszámítása

Gauss-elimináció után a vezéregyesek száma a rang.

Vagy:

Sor- és oszloptranszformációkkal elérjük, hogy mátrix minden eleme 0 vagy 1, és minden sorban, oszlopban legfeljebb egy darab 1-es legyen. Az 1-esek száma adja meg a mátrix rangját.

Példa:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 3 \end{bmatrix} \overset{o_1 \leftrightarrow o_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix} \underset{s_3 - 7s_1}{\overset{s_2 - 2s_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -9 & -18 \end{bmatrix} \underset{o_3 - 3o_1}{\overset{o_2 - 2o_1}{\sim}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -9 & -18 \end{bmatrix} \overset{s_2/(-1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -9 & -18 \end{bmatrix} \overset{s_3 + 9s_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{o_3 - 2o_2}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A rang tehát 2.

Feladat

Mennyi a $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & 5 & -3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix rangja?

Feladat

Mennyi a $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & 5 & -3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix rangja?

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & 5 & -3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \overset{o_1 \leftrightarrow o_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & -2 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \underset{s_3 - 3s_1}{\overset{s_2 + 3s_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 14 & 4 & 22 \\ 0 & -7 & -2 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{o_3 - 2o_1 \\ o_4 - 5o_1}}{\overset{o_2 - 3o_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 4 & 22 \\ 0 & -7 & -2 & -11 \end{bmatrix} \overset{s_2 + 2s_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & -11 \end{bmatrix} \overset{o_2/(-7)}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -11 \end{bmatrix} \underset{o_4 + 11o_2}{\overset{o_3 + 2o_2}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A rang tehát 2.

Vektorrendszer rangja

Hány lineárisan független vektort választhatunk ki az alábbiak közül?

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Pontosan annyit, amennyi a $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & 5 & -3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix rangja, ami 2.

Tehát két lineárisan független vektort választhatunk ki (azaz egy síkba esnek).

És az alábbiak közül?

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Ezek közül is 2-t, mert ezek a fenti mátrix sorai.

Feladat

A $(2,3),(3,5),(7,2),(1,4)$ vektorok közül legfeljebb hány lineárisan független vektort választhatunk ki?

Feladat

A $(2,3),(3,5),(7,2),(1,4)$ vektorok közül legfeljebb hány lineárisan független vektort választhatunk ki?

Az alábbi mátrix rangját számoljuk ki:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \\ 7 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \overset{s_1 \leftrightarrow s_4}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \\ 7 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \underset{\substack{s_3-7s_1 \\ s_4-2s_1}}{\overset{s_2-3s_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -7 \\ 0 & -26 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \overset{o_2-4o_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \\ 0 & -26 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \overset{s_2/(-7)}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -26 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \underset{s_4+5s_2}{\overset{s_3+26s_2}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A mátrix rangja 2.
Ez azt jelenti, hogy legfeljebb 2 lineárisan független vektort tudunk kiválasztani.