

1. gyakorlat

Improprius integrálok

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet, Geometria Tanszék

2023. mácius 2.

1. feladat (a)

Számítsuk ki a $\int_3^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^3} dx$ improprius integrált.

1. feladat (a)

Számítsuk ki a $\int_3^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^3} dx$ improprius integrált.

A végtelenig való integrálást határértékként írjuk fel:

$$\begin{aligned} \int_3^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^3} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_3^b (x-1)^{-3} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{(x-1)^{-2}}{-2} \right]_3^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{(b-1)^{-2}}{-2} - \frac{(3-1)^{-2}}{-2} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

1. feladat (b)

Számítsuk ki a $\int_2^{+\infty} \frac{6}{x^2 + x - 2} dx$ improprius integrált.

1. feladat (b)

Számítsuk ki a $\int_2^{+\infty} \frac{6}{x^2 + x - 2} dx$ improprius integrált.

Először a határozatlan integrált számoljuk ki parciális törtekre bontással.

Mivel $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$, így

$$\frac{6}{x^2 + x - 2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2}$$

alakba szeretnénk átírni, ahol az A és B együtthatókat beszorzás után kapott egyenletrendszerből kapjuk:

$$6 = A(x + 2) + B(x - 1)$$

$$6 = (A + B)x + 2A - B,$$

amiből $A + B = 0$ és $2A - B = 6$. Ebből $A = 2$, $B = -2$, és így

$$\begin{aligned} \int \frac{6}{x^2 + x - 2} dx &= \int \frac{2}{x - 1} - \frac{2}{x + 2} dx = 2 \ln |x - 1| - 2 \ln |x + 2| + C = \\ &= 2 \ln \left| \frac{x - 1}{x + 2} \right| + C. \end{aligned}$$

1. feladat (b) folytatás

Számítsuk ki a $\int_2^{+\infty} \frac{6}{x^2 + x - 2} dx$ improprius integrált.

Kiszámoltuk, hogy

$$\int \frac{6}{x^2 + x - 2} dx = 2 \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C.$$

Ezzel a feladat improprius integrálja:

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{6}{x^2 + x - 2} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{6}{x^2 + x - 2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[2 \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| \right]_2^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} 2 \ln \left| \frac{b-1}{b+2} \right| - 2 \ln \left| \frac{2-1}{2+2} \right| = -2 \ln \left(\frac{1}{4} \right) = \\ &= -2 \ln (2^{-2}) = 4 \ln 2 \approx 2,77, \end{aligned}$$

mert

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{b-1}{b+2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{b}}{1 + \frac{2}{b}} = 1.$$

1. feladat (c)

Számítsuk ki a $\int_0^{+\infty} x e^{-2x} dx$ improprius integrált.

1. feladat (c)

Számítsuk ki a $\int_0^{+\infty} x e^{-2x} dx$ improprius integrált.

Először a határozatlan integrált számoljuk ki parciális integrálással:

$$\int x e^{-2x} dx = x \frac{e^{-2x}}{-2} - \int \frac{e^{-2x}}{-2} dx = -\frac{x e^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + C$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x & f'(x) &= 1 \\ g'(x) &= e^{-2x} & g(x) &= \frac{e^{-2x}}{-2} \end{aligned}$$

Ezzel az improprius integrál:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x e^{-2x} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x e^{-2x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{x e^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} \right]_0^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} -\frac{b e^{-2b}}{2} - \frac{e^{-2b}}{4} - \left(-\frac{0 e^{-2 \cdot 0}}{2} - \frac{e^{-2 \cdot 0}}{4} \right) = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk a L'Hospital-szabály alábbi alkalmazását:

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} b e^{-2b} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{b}{e^{2b}} \rightsquigarrow \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{2b} \cdot 2} = 0$$

2. feladat (a)

Számítsuk ki a $\int_{-9}^0 \frac{1}{\sqrt{9+x}} dx$ improprius integrált.

2. feladat (a)

Számítsuk ki a $\int_{-9}^0 \frac{1}{\sqrt{9+x}} dx$ improprius integrált.

A függvény -9 -ben „száll el”, így azt kell határértékkel közelíteni:

$$\begin{aligned} \int_{-9}^0 \frac{1}{\sqrt{9+x}} dx &= \lim_{a \rightarrow -9^+} \int_a^0 (9+x)^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{a \rightarrow -9^+} \left[\frac{(9+x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_a^0 = \\ &= \lim_{a \rightarrow -9^+} \left(2 \cdot (9+0)^{\frac{1}{2}} - 2 \cdot (9+a)^{\frac{1}{2}} \right) = 6 \end{aligned}$$

2. feladat (b)

Számítsuk ki a $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt[3]{(8-2x)^4}} dx$ improprius integrált.

2. feladat (b)

Számítsuk ki a $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt[3]{(8-2x)^4}} dx$ improprius integrált.

Ebben az esetben a 4-et kell határértékkel közelíteni, majd használjuk a lineáris helyettesítési szabályt:

$$\begin{aligned} \int_0^4 \frac{1}{\sqrt[3]{(8-2x)^4}} dx &= \lim_{b \rightarrow 4^-} \int_0^b (8-2x)^{-\frac{4}{3}} dx = \lim_{b \rightarrow 4^-} \left[\frac{1}{-2} \cdot \frac{(8-2x)^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}} \right]_0^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow 4^-} \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{8-2x}} \right]_0^b = \lim_{b \rightarrow 4^-} \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{8-2b}} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = +\infty, \end{aligned}$$

így ez az improprius integrál divergens.

2. feladat (c)

Számítsuk ki a $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$ improprius integrált.

2. feladat (c)

Számítsuk ki a $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$ improprius integrált.

Először a határozatlan integrált számítjuk ki.

Visszavezetjük egy már ismertre (majd lineáris helyettesítés):

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{4}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + C = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + C\end{aligned}$$

Ezzel az improprius integrál (a függvény a 2-ben tart a végtelenhez):

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx &= \lim_{b \rightarrow 2^-} \int_0^b \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \lim_{b \rightarrow 2^-} \left[\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) \right]_0^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow 2^-} \arcsin\left(\frac{b}{2}\right) - \arcsin\left(\frac{0}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

3. feladat

Legyen $f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, ahol $\lambda > 0$ adott paraméter. Mutassuk meg, hogy az f_λ grafikonja alatti terület a $[0, +\infty)$ intervallumon minden $\lambda > 0$ esetén 1-gyel

egyenlő, azaz $\int_0^{+\infty} f_\lambda(x) \, dx = 1$ minden $\lambda > 0$ számra.

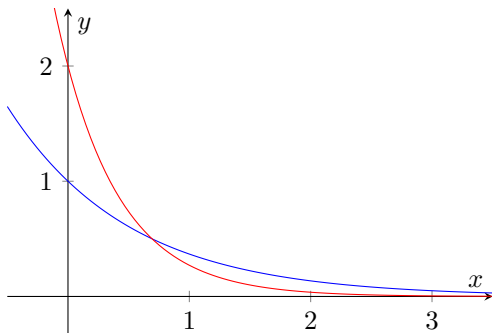
3. feladat

Legyen $f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, ahol $\lambda > 0$ adott paraméter. Mutassuk meg, hogy az f_λ grafikonja alatti terület a $[0, +\infty)$ intervallumon minden $\lambda > 0$ esetén 1-gyel

egyenlő, azaz $\int_0^{+\infty} f_\lambda(x) dx = 1$ minden $\lambda > 0$ számra.

Az improprius integrál (felhasználva, hogy $(e^{-\lambda x})' = e^{-\lambda x}(-\lambda)$):

$$\int_0^{+\infty} f_\lambda(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \lambda e^{-\lambda x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} [-e^{-\lambda x}]_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} -e^{-\lambda b} - (-1) = 1$$



Bónuszfeladat

Legyen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } x \in [a, b] \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus [a, b]. \end{cases}$$

Számítsuk ki a következő integrálokat:

$$(a) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx,$$

$$(b) \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \, dx.$$

Házi feladatok

Számítsuk ki az alábbi integrálokat!

$$(a) \int_2^{+\infty} \frac{1}{(2x-1)^2} dx$$

$$(b) \int_2^{+\infty} e^{-5x} dx$$

$$(c) \int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx$$

Házi feladatok végeredményei

$$(a) \frac{1}{6} \approx 0,167$$

$$(b) \frac{e^{-10}}{5} \approx 9,08 \cdot 10^{-6}$$

$$(c) \frac{3}{2} = 1,5$$