10. előadás

Taylor-polinom

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2024. október 15.

Magasabbrendű deriváltak

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény másodrendű/második deriváltja az $f'(x)$ függvény deriváltja (feltéve, hogy létezik).

Jelölése: $f''(x)$ vagy $\dfrac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}$, stb.

Hasonlóan n-edrendű/n-edik derivált az $(n-1)$-edrendű deriváltnak a deriváltja (feltéve, hogy létezik).

Jelölés: $f^{(n)}(x)$ vagy $\dfrac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}$, stb.

Példák:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin x & \qquad g(x) &= x^3 - 3x^2 - 7x - 1 \\
f'(x) &= \cos x & g'(x) &= 3x^2 - 6x - 7 \\
f''(x) &= -\sin x & g''(x) &= 6x - 6 \\
f'''(x) &= -\cos x & g'''(x) &= 6 \\
f^{(4)}(x) &= \sin x & g^{(4)}(x) &= 0 \\
f^{(5)}(x) &= \cos x & g^{(5)}(x) &= 0
\end{aligned}
$$

Taylor-polinom

Cél: a függvényeket polinomokkal közelíteni.

Először legyen $f(x)$ egy polinom.

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n \qquad f(0) = a_0$$
$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots \qquad f'(0) = a_1$$
$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3x + \dots \qquad f''(0) = 2a_2$$
$$f'''(x) = 6a_3 + \dots \qquad f'''(0) = 6a_3$$

Általában: $f^{(k)}(0) = k!a_k$, így $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

Tehát:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Ugyanezt felírhatjuk akkor is, ha $f(x)$ egy tetszőleges függvény (nem polinom):

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Ez az f függvény n-edfokú Taylor-polinomja.

Néha a kapott polinom nem közelíti a függvényt (pl. $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$).

Taylor-polinom kicsit általánosabban

Általánosítás, ha x_0 körüli írjuk fel az előzőt:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Ez az f függvény x_0 körüli n-edfokú Taylor-polinomja.

Ezzel lehet közelíteni a függvényt.

Az exponenciális függvény Taylor-polinomjai

Az $f(x) = e^x$ függvény 0 körüli n-edfokú Taylor-polinomja:

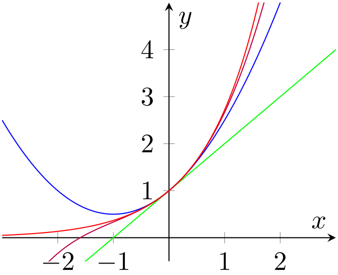
$$\begin{aligned} f(x) &= e^x & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= e^x & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= e^x & f''(0) &= 1 \\ f^{(n)}(x) &= e^x & f^{(n)}(0) &= 1 \end{aligned}$$

Tehát:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

Az e^x függvény közelítései:

- elsőrendű: $1 + x$
- másodrendű: $1 + x + \frac{x^2}{2}$
- harmadrendű: $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$



A szinusz és a koszinusz sorfejtése

Az $f(x) = \sin x$ függvény 0 körüli Taylor-polinomjai:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin x & f(0) &= 0 \\
f'(x) &= \cos x & f'(0) &= 1 \\
f''(x) &= -\sin x & f''(0) &= 0 \\
f'''(x) &= -\cos x & f'''(0) &= -1 \\
f^{(4)}(x) &= \sin x & f^{(4)}(0) &= 0 \\
f^{(5)}(x) &= \cos x & f^{(5)}(0) &= 1
\end{aligned}$$

Tehát:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Hasonlóan a koszinusz sorfejtése:

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Feladatok

$$e^{3x} \approx$$

Feladatok

$$e^{3x} \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(3x)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} x^k = 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \cdots + \frac{3^n}{n!}x^n$$

$$\sin\left(x^2\right) \approx$$

Feladatok

$$e^{3x} \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(3x)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} x^k = 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \cdots + \frac{3^n}{n!}x^n$$

$$\sin\left(x^2\right) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(x^2\right)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{4k+2} =$$
$$= x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{120} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{4n+2}$$

$$\frac{\sin x}{x} \approx$$

Feladatok

$$e^{3x} \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(3x)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} x^k = 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \cdots + \frac{3^n}{n!}x^n$$

$$\sin\left(x^2\right) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(x^2\right)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{4k+2} =$$

$$= x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{120} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{4n+2}$$

$$\frac{\sin x}{x} \approx \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}}{x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$$

$$xe^{-2x} \approx$$

Feladatok

$$e^{3x} \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(3x)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!}x^k = 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \cdots + \frac{3^n}{n!}x^n$$

$$\sin\left(x^2\right) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(x^2\right)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{4k+2} =$$

$$= x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{120} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{4n+2}$$

$$\frac{\sin x}{x} \approx \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}}{x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}$$

$$xe^{-2x} \approx x\sum_{k=0}^{n} \frac{(-2x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-2)^k}{k!}x^{k+1} = x - 2x^2 + 2x^3 - \frac{4}{3}x^4 + \cdots + \frac{(-2)^n}{n!}x^{n+1}$$

Még egy sorfejtés

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} \qquad f''(0) = 2$$

$$f'''(x) = \frac{6}{(1-x)^4} \qquad f'''(0) = 6$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{24}{(1-x)^5} \qquad f^{(4)}(0) = 24$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \qquad f^{(n)}(0) = n!$$

A Taylor-polinom:

$$\frac{1}{1-x} \approx 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$$

Nem túl meglepő, hiszen:

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$$

Feladatok

$$\frac{1}{1+x}$$

Feladatok

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} \approx \sum_{k=0}^{n} (-x)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n$$

$$\frac{1}{4-x}$$

Feladatok

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} \approx \sum_{k=0}^{n}(-x)^k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k = 1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n$$

$$\frac{1}{4-x} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{4}} \approx \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{x}{4}\right)^k = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4^{k+1}}x^k = \frac{1}{4}+\frac{x}{16}+\frac{x^2}{64}+\cdots+\frac{1}{4^{n+1}}x^n$$

$$\frac{x}{x+1}$$

Feladatok

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}\approx\sum_{k=0}^{n}(-x)^k=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n$$

$$\frac{1}{4-x}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{4}}\approx\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{x}{4}\right)^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4^{k+1}}x^k=\frac{1}{4}+\frac{x}{16}+\frac{x^2}{64}+\cdots+\frac{1}{4^{n+1}}x^n$$

$$\frac{x}{x+1}=x\frac{1}{1+x}\approx x\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{k+1}=\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}x^k=$$
$$=x-x^2+x^3-x^4+\cdots+(-1)^n x^{n+1}$$

Másik lehetőség:

$$\frac{x}{x+1}=\frac{x+1-1}{x+1}=1-\frac{1}{1+x}\approx 1-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k=-\sum_{k=1}^{n}(-1)^k x^k=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}x^k=x-x^2+x^3-x^4+\cdots+(-1)^{n+1}x^n$$

Taylor-polinom Lagrange-maradéktaggal

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}_{\text{Taylor-polinom}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} x^{n+1}}_{\text{maradéktag}} \qquad 0 < t < x \text{ vagy } x < t < 0$$

Példa:

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + \frac{e^t}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Ez $x = 1$ esetén:

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{e^t}{(n+1)!} \quad 0 < t < 1,$$

tehát

$$\left| e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right| = \frac{e^t}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!},$$

így a relatív hiba:

$$\frac{\left| e - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right|}{e} < \frac{1}{(n+1)!}.$$