11. előadás első része

Görbék érintője

Horváth Márton

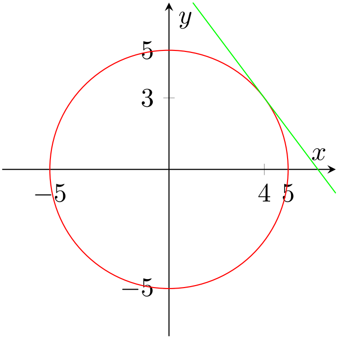
BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2024. október 16.

Impliciten adott görbe érintője

Nemcsak függvénygrafikonnal, hanem egyenlettel is megadhatunk egy görbét, például:

$$x^2 + y^2 = 25$$



Ez egy 5 sugarú, origó középpontú kör.

Ez a görbe implicit megadása.

Írjuk fel az érintőjét a $(4,3)$ pontban.

Ha a görbe az $y(x)$ függvény grafikonja:

$$x^2 + y^2(x) = 25$$

Ennek deriváltja:

$$2x + 2y(x)y'(x) = 0$$

$$y'(x) = -\frac{x}{y(x)}$$

Ha $x = 4$ és $y(4) = 3$, akkor $y'(4) = -\dfrac{4}{3}$, így az érintő egyenlete:

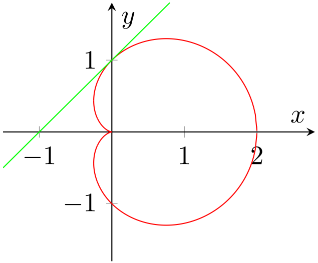
$$y = -\frac{4}{3}(x-4) + 3 \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{4}{3}x + \frac{25}{3}.$$

Kardioid érintője

A következő egyenlet a kardioid nevű görbét adja meg:

$$\left(x^2+y^2\right)^2-2x\left(x^2+y^2\right)-y^2=0$$
$$x^4+2x^2y^2+y^4-2x^3-2xy^2-y^2=0$$

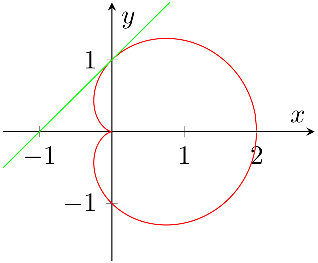
Írjuk fel az érintőjét a $(0,1)$ pontban!



Kardioid érintője

A következő egyenlet a kardioid nevű görbét adja meg:

$$\left(x^2+y^2\right)^2 - 2x\left(x^2+y^2\right) - y^2 = 0$$
$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2x^3 - 2xy^2 - y^2 = 0$$



Írjuk fel az érintőjét a $(0,1)$ pontban!

Ha a görbe az $y(x)$ függvény grafikonja:

$$x^4 + 2x^2y^2(x) + y^4(x) - 2x^3 - 2xy^2(x) - y^2(x) = 0$$

Ennek a deriváltja 0:

$$4x^3+4xy^2(x)+4x^2y(x)y'(x)+4y^3(x)y'(x)-6x^2-2y^2(x)-4xy(x)y'(x)-2y(x)y'(x)$$

$$\left(4x^2y(x)+4y^3(x)-4xy(x)-2y(x)\right)y'(x) = -4x^3-4xy^2(x)+6x^2+2y^2(x)$$

$$y'(x) = \frac{-4x^3-4xy^2(x)+6x^2+2y^2(x)}{4x^2y(x)+4y^3(x)-4xy(x)-2y(x)}$$

Ha $x=0$ és $y(0)=1$, akkor $y'(0)=\dfrac{2}{4-2}=1$, így az érintő egyenlete:

$$y = x+1.$$

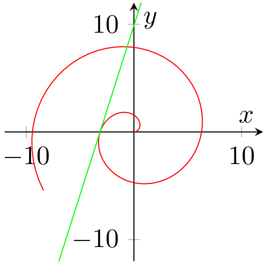
Paraméteresen adott görbe érintője

Tekintsük azon pontokat a síkon, melyet befut

$$x(t) = t\cos t,$$
$$y(t) = t\sin t,$$

amint t befutja a pozitív számokat.

Ezt arkhimédészi spirálnak nevezik.



Írjuk fel az érintőjét a $t = \pi$ helyen!
Ekkor $x(\pi) = -\pi$ és $y(\pi) = 0$.

$$x'(t) = \cos t - t\sin t \qquad x'(\pi) = -1$$
$$y'(t) = \sin t + t\cos t \qquad y'(\pi) = -\pi$$

Az érintő meredeksége $\dfrac{y'(\pi)}{x'(\pi)} = \dfrac{-\pi}{-1} = \pi$, így az érintő egyenlete:

$$y = \pi(x - (-\pi)) + 0$$
$$y = \pi x + \pi^2$$