12. előadás

Globális szélsőértékek

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2024. október 22.

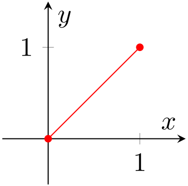
Globális/abszolút szélsőértékek

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontja globális/abszolút maximumhely, ha $f(x) \leq f(x_0)$ minden $x \in D_f$ esetén.

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontja globális/abszolút minimumhely, ha $f(x) \geq f(x_0)$ minden $x \in D_f$ esetén.

A globális minimum/maximum lehet lokális szélsőérték vagy az értelmezési tartomány szélén is.

Példa:
$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ függvény
globális minimuma $x = 0$-ban 0, és
globális maximuma $x = 1$-ben 1.

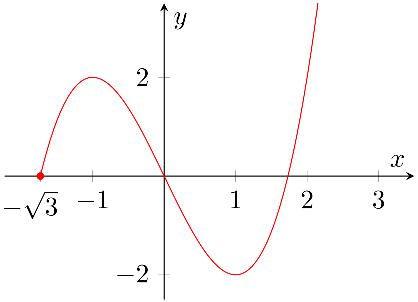


Példa

Keressük meg az

$$f\colon \left[-\sqrt{3}, 3\right] \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = x^3 - 3x$$

függvény globális szélsőértékeit!



Lokális szélsőértékek: $f'(x) = 3x^2 - 3$, azaz $x_{1,2} = \pm 1$-ben.

Lokális minimum az $x_1 = +1$ pontban -2, míg lokális maximum az $x_2 = -1$ pontban $+2$.

Az intervallum szélein a függvény értéke:

$$f\left(-\sqrt{3}\right) = \left(-\sqrt{3}\right)^3 - 3\left(-\sqrt{3}\right) = -3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 0$$
$$f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3 = 27 - 9 = 18$$

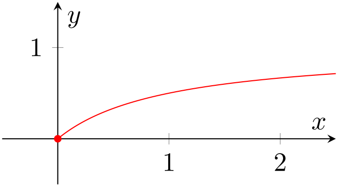
Így az abszolút minimumérték: -2 ($x = 1$-ben), és az abszolút maximumérték: 18 ($x = 3$-ban).

Nem korlátos intervallum esete

Ha a függvény nem korlátos intervallumon van értelmezve, akkor határértéket kell számolni.

Példa: $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$



A lokális szélsőérték kereséséhez megnézzük a deriváltat:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x+1) - x \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2},$$

ami soha nem 0, így nincs lokális szélsőérték.

Az intervallum szélein:

$$f(0) = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1$$

Tehát a globális minimumérték 0 ($x = 0$-ban), míg globális maximum nincs, mert az 1-et nem veszi fel a függvény (ez a legkisebb felső korlát).

Nyílt intervallum esete

$$f(x) = \ln(x-1) + \ln(2-x)$$

Nyílt intervallum esete

$$f(x) = \ln(x-1) + \ln(2-x)$$

Ezt a függvényt csak $x - 1 > 0$ és $2 - x > 0$ esetén, azaz az $(1, 2)$ intervallumon tudjuk értelmezni.

Lokális szélsőértékeihez a derivált:

$$f'(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2-x} = \frac{(2-x)-(x-1)}{(2-x)(x-1)} = \frac{3-2x}{(2-x)(x-1)},$$

melynek nullhelye az $x_0 = 3/2$-ben van. A második derivált:

$$f''(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} - \left(-\frac{1}{(2-x)^2} \cdot (-1)\right) = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(2-x)^2},$$

melynek értéke $x_0 = 3/2$-ben:

$$f''(x_0) = f''\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -8,$$

ami negatív, tehát ez lokális maximum. A függvény értéke:

$$f(x_0) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -2\ln 2.$$

Nyílt intervallum esete – folytatás

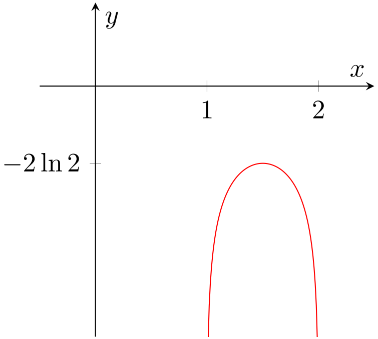
$$f(x) = \ln(x-1) + \ln(2-x) \qquad (x \in (1,2))$$

Az intervallum szélső pontjaiban nincs értelmezve a függvény, így ott csak határértékeket tudunk venni:

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} \ln(x-1) + \ln(2-x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} \ln(x-1) + \ln(2-x) = -\infty$$

Tehát a függvény tetszőlegesen kicsi értéket felvesz, így nincs globális minimuma.

A globális maximum a lokális maximummal egyezik meg, melynek értéke $-2\ln 2$.



Egy periodikus függvény

$$f(x) = \sin^2(2x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Egy periodikus függvény

$$f(x) = \sin^2(2x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

A derivált értéke:

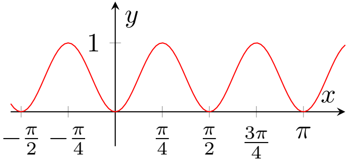
$$f'(x) = 2\sin(2x)\cos(2x) \cdot 2 = 2\sin(4x)$$

Ennek nullhelyei:

$$2\sin(4x) = 0$$

$$4x = k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

$$x = k\frac{\pi}{4} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$



A második derivált:

$$f''(x) = 2\cos(4x) \cdot 4 = 8\cos(4x),$$

melynek értéke a $k\frac{\pi}{4}$ helyeken:

$$f''\left(k\frac{\pi}{4}\right) = 8\cos(k\pi) = 8 \cdot (-1)^k,$$

mely páros k esetén $8 > 0$, azaz lokális minimum (függvény értéke 0), míg páratlan k esetén $-8 < 0$, azaz lokális maximum (függvény értéke 1).

Az intervallum szélein ebben az esetben nem létezik a határérték, de azt tudjuk, hogy a függvény értéke 0 és $+1$ között van.

Hengeres feladat

Határozzuk meg az 1 literes, felül nyitott legkisebb felszínű henger adatait!

Hengeres feladat

Határozzuk meg az 1 literes, felül nyitott legkisebb felszínű henger adatait!

Ha a henger alapjának a sugara r, és a magassága m, akkor a térfogata $r^2\pi m$, melynek 1-nek kell lennie (feltéve, hogy deciméterben mérjük a hosszakat):

$$r^2\pi m = 1,$$

ebből kifejezhetjük a magasságot:

$$m = \frac{1}{r^2\pi}.$$

A felszín felhasználva a magasság kifejezését:

$$A = r^2\pi + 2\pi r m = r^2\pi + 2\pi r \frac{1}{r^2\pi} = r^2\pi + \frac{2}{r}$$

Ennek az r-től függő kifejezésnek keressük a minimumát.

Hengeres feladat – folytatás

$$A(r) = r^2\pi + \frac{2}{r}$$

kifejezés minimumát keressük. Először lokális szélsőértékeket keresünk:

$$A'(r) = 2r\pi - \frac{2}{r^2}$$

Ennek r_0 nullhelyére $2r_0\pi = \dfrac{2}{r_0^2}$, amiből $r_0 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$.

A második derivált értéke:

$$A''(r) = 2\pi - (-2)\frac{2}{r^3} = 2\pi + \frac{4}{r^3},$$

ami az r_0 helyen:

$$A''(r_0) = A''\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}\right) = 2\pi + \frac{4}{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^3} = 2\pi + 4\pi = 6\pi > 0,$$

így ez valóban lokális minimum.

Hengeres feladat – folytatás

$$A(r) = r^2\pi + \frac{2}{r}$$

kifejezés $r \in (0, +\infty)$ esetén értelmes, tehát ezen intervallum határain nézzük a határértékeket:

$$\lim_{r \to 0+} A(r) = \lim_{r \to 0+} r^2\pi + \frac{2}{r} = +\infty$$

$$\lim_{r \to +\infty} A(r) = \lim_{r \to +\infty} r^2\pi + \frac{2}{r} = +\infty$$

Tehát az $r_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$ pontban globális minimum van.

Ugyanerre az eredményre juthatunk, ha meggondoljuk, hogy az A függvény a $(0, r_0)$ intervallumban monoton csökken, míg az $(r_0, +\infty)$ intervallumban monoton nő.

Ebben az esetben a henger magassága:

$$m_0 = \frac{1}{r_0^2\pi} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^2 \pi} = \frac{1}{\pi^{1-\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$$

Populista Párt

A Populista Párt vezetője tudja, hogy ha hatalomra kerülése esetére a bérek x-szeresére való növekedését ígéri meg, akkor a szavazók $30(x-1)^2$ százaléka nem fog hinni neki (és így nem fognak rájuk szavazni), viszont a maradék szavazók $50(x-1)$ százaléka a pártra fog szavazni. Hányszoros bérnövekedést kell ígérnie, hogy a lehető legtöbb szavazatot kapja?

Populista Párt

A Populista Párt vezetője tudja, hogy ha hatalomra kerülése esetére a bérek x-szeresére való növekedését ígéri meg, akkor a szavazók $30(x-1)^2$ százaléka nem fog hinni neki (és így nem fognak rájuk szavazni), viszont a maradék szavazók $50(x-1)$ százaléka a pártra fog szavazni. Hányszoros bérnövekedést kell ígérnie, hogy a lehető legtöbb szavazatot kapja?

Ha a bérek x-szeresére való növekedését ígérik ($x \geq 1$), akkor a szavazók $0{,}3(x-1)^2$ része nem hisz nekik, a maradék $1-0{,}3(x-1)^2$ rész viszont elhiszi. Ezeknek csak a $0{,}5(x-1)$ része fog ténylegesen rájuk szavazni, így a szavazatszám:

$$\left(1-0{,}3(x-1)^2\right)\cdot 0{,}5(x-1) = 0{,}5(x-1) - 0{,}15(x-1)^3$$

Látjuk, hogy kényelmesebb az $y = x-1 \geq 0$ változóval számolni, így ezzel írjuk fel a függvényt:

$$f(y) = 0{,}5y - 0{,}15y^3$$

Populista Párt – folytatás

$$f(y) = 0{,}5y - 0{,}15y^3 \qquad (y \geq 0)$$

függvény lokális szélsőértékeit keressük először:

$$f'(y) = 0{,}5 - 0{,}15 \cdot 3y^2 = 0{,}5 - 0{,}45y^2,$$

melynek nullhelye (figyelembe véve, hogy $y \geq 0$):

$$y_0 = \sqrt{\frac{0{,}5}{0{,}45}} = \frac{\sqrt{10}}{3},$$

A második derivált:

$$f''(y) = -0{,}45 \cdot 2y = -0{,}9y,$$

ami pozitív y esetén negatív, tehát $f''(y_0) < 0$, tehát ez lokális maximum.

A függvény értéke 0-ban: $f(0) = 0$, míg a végtelenben a határérték:

$$\lim_{y \to +\infty} f(y) = \lim_{y \to +\infty} 0{,}5y - 0{,}15y^3 = \lim_{y \to +\infty} y^3 \left(0{,}5\frac{1}{y^2} - 0{,}15 \right) = -\infty$$

Így y_0-ban globális maximum van. Tehát az optimális x érték:

$$x_0 = y_0 + 1 = \frac{\sqrt{10}}{3} + 1 \approx 2{,}054.$$

Úszómedence

Fel szeretnénk tölteni a $10\,000$ literes uszúmedencénket a közeli kútról. Ehhez tetszőlegesen nagy vödröt használhatunk, de ha l literes vödröt használunk, akkor egy forduló $64 + l^2$ másodpercig tart. Mekkora vödröt használjunk, hogy a lehető leggyorsabban végezzünk?

Úszómedence

Fel szeretnénk tölteni a $10\,000$ literes uszúmedencénket a közeli kútról. Ehhez tetszőlegesen nagy vödröt használhatunk, de ha l literes vödröt használunk, akkor egy forduló $64 + l^2$ másodpercig tart. Mekkora vödröt használjunk, hogy a lehető leggyorsabban végezzünk?

Ha $l > 0$ literes vödröt használunk, akkor $\frac{10\,000}{l}$ fordulóra van szükség, tehát a teljes feltöltés időtartama:

$$f(l) = \frac{10\,000}{l}(64 + l^2) = \frac{640\,000}{l} + 10\,000l.$$

Ennek a függvénynek keressük a minimumát.

A határértékek a széleken:

$$\lim_{l \to 0+} f(l) = \lim_{l \to 0+} \frac{640\,000}{l} + 10\,000l = +\infty$$
$$\lim_{l \to +\infty} f(l) = \lim_{l \to +\infty} \frac{640\,000}{l} + 10\,000l = +\infty$$

Úszómedence – folytatás

Az $f(l) = \frac{640\,000}{l} + 10\,000l$ függvény deriváltja:

$$f'(l) = -\frac{640\,000}{l^2} + 10\,000,$$

melynek nullhelye:

$$\begin{aligned} f'(l) &= 0 \\ -\frac{640\,000}{l^2} + 10\,000 &= 0 \\ 10\,000 &= \frac{640\,000}{l^2} \\ 10\,000l^2 &= 640\,000 \\ l^2 &= 64 \\ l &= 8 \end{aligned}$$

A második derivált:

$$f''(l) = \frac{1280\,000}{l^3},$$

ami minden pozitív helyen, így az $l = 8$-ban is pozitív. Tehát $l = 8$-ban lokális minimum van. Ez egyben globális minimum is.