

13. előadás

L'Hospital-szabály

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2024. október 29.

L'Hospital-szabály

Bernoulli–L'Hospital-szabály a $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$ határérték kiszámítására
(szokásos írásmód a L'Hôpital is)

Az $f(x)$ és $g(x)$ függvények differenciálhatóak az α egy nyílt környezetében (esetleg α -ban nem).

Ebben a környezetben $g'(x) \neq 0$ ($x \neq \alpha$).

Továbbá

- ▶ $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = 0$, vagy
- ▶ $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \pm\infty$ és $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = \pm\infty$.

Ekkor ha létezik a $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \beta$, akkor $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \beta$.

Az α, β valós szám vagy $\pm\infty$ lehet.

Az $x \rightarrow \alpha$ helyett mindenütt lehet venni jobb vagy bal oldali határértéket.

Példa

Mennyi a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ határérték?

$$f(x) = e^x - 1 \text{ és } g(x) = x.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0.$$

Deriváltak: $f'(x) = e^x$ és $g'(x) = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

Ezért

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Feladat

Mennyi a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ határérték?

Feladat

Mennyi a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ határérték?

$$f(x) = \sin x \text{ és } g(x) = x.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0.$$

Deriváltak: $f'(x) = \cos x$ és $g'(x) = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

Ezért

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Egy megjegyzés

Csak akkor működik a szabály, ha a $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték létezik.

Ha nem létezik, attól még a $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$ létezhethet:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sin x) = +\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x = +\infty$$

$$f(x) = x + \sin x$$

$$g(x) = x$$

$$f'(x) = 1 + \cos x$$

$$g'(x) = 1$$

Tehát:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \cos x,$$

ami nem létezik. De

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Többszöri alkalmazás

Többször is alkalmazhatjuk a tételt:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f''(x)}{g''(x)} \rightsquigarrow \dots = \beta$$

Példa:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = ?$$

Többszöri alkalmazás

Többször is alkalmazhatjuk a tételt:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f''(x)}{g''(x)} \rightsquigarrow \dots = \beta$$

Példa:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x - x - 1 = e^0 - 0 - 1 = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

$$f(x) = e^x - x - 1$$

$$g(x) = x^2$$

$$f'(x) = e^x - 1$$

$$g'(x) = 2x$$

$$f''(x) = e^x$$

$$g''(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2},$$

tehát

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Feladat

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = ?$$

Feladat

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = ?$$

Ez egy $\frac{0}{0}$ típusú határérték, tehát alkalmazhatjuk a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2},$$

tehát

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Ha nem törtről van szó

Ha nem tört határértékét szeretnénk megállapítani, akkor is megpróbálkozhatunk törtté alakítani.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \frac{1}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{2x}} \rightsquigarrow$$

Ha nem törtről van szó

Ha nem tört határértékét szeretnénk megállapítani, akkor is megpróbálkozhatunk törtté alakítani.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \frac{1}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{2x}} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{2x} \cdot 2} = 0$$

De van, amikor ennyire nem látszik:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \rightsquigarrow$$

Ha nem törtről van szó

Ha nem tört határértékét szeretnénk megállapítani, akkor is megpróbálkozhatunk törtté alakítani.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \frac{1}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{2x}} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{2x} \cdot 2} = 0$$

De van, amikor ennyire nem látszik:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{-1} = 0$$

Két tört különbsége a közös nevezőre való hozás után már egy tört:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} =$$

Ha nem törtről van szó

Ha nem tört határértékét szeretnénk megállapítani, akkor is megpróbálkozhatunk törtté alakítani.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \frac{1}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{2x}} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{2x} \cdot 2} = 0$$

De van, amikor ennyire nem látszik:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{-1} = 0$$

Két tört különbsége a közös nevezőre való hozás után már egy tört:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) - \ln x}{(x-1) \ln x} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\ln x + (x-1) \frac{1}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x \ln x + x-1} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x + x \frac{1}{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x + 2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Egy fontos különbség

A tört deriválása és a L'Hospital-szabály két különböző dolog!

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Nem szabad összekeverni!

Egy régebbi példa

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{\sqrt{3-2x} - 1}$$

Egy régebbi példa

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{\sqrt{3-2x} - 1} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+3}}}{\frac{1}{2\sqrt{3-2x}}(-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\sqrt{3-2x}}{2\sqrt{x+3}} = \frac{-\sqrt{1}}{2\sqrt{4}} = -\frac{1}{4}$$

Vajon mennyi a következő határérték?

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 1}{\sqrt{3-2x} - 1} = ?$$

Egy régebbi példa

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{\sqrt{3-2x} - 1} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+3}}}{\frac{1}{2\sqrt{3-2x}}(-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\sqrt{3-2x}}{2\sqrt{x+3}} = \frac{-\sqrt{1}}{2\sqrt{4}} = -\frac{1}{4}$$

Vajon mennyi a következő határérték?

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 1}{\sqrt{3-2x} - 1} = ?$$

Itt nem alkalmazhatjuk a L'Hospital-szabályt, mert nem $\frac{0}{0}$ alakú!

Egyébként nem létezik a határérték, mert $\frac{1}{0}$ alakú, és a nevező lehet negatív és pozitív is.