

# 14. előadás

Középértéktételek, aszimptoták és konvexitás

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,  
Algebra és Geometria Tanszék

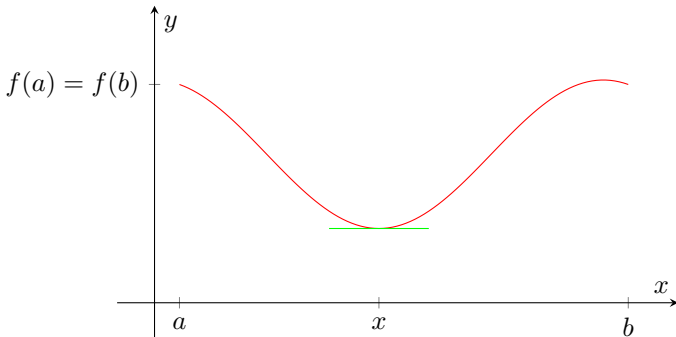
2024. október 30.

# Rolle-tétel

Ha az  $f(x)$  függvény az  $[a, b]$  intervallumon folytonos, az  $(a, b)$ -n differenciálható, és  $f(a) = f(b)$ , akkor van olyan  $x \in (a, b)$ , hogy  $f'(x) = 0$  (az érintő vízszintes).

## Bizonyítás:

A Weierstrass-tétel szerint a függvény felveszi a minimumát és a maximumát, ezek közül legalább az egyik belső pont. Ez lokális szélsőérték, így a derivált nulla.



# Lagrange-tétel

Ha az  $f(x)$  függvény az  $[a, b]$  intervallumon folytonos, az  $(a, b)$ -n differenciálható, akkor van olyan  $x \in (a, b)$ , hogy

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

**Bizonyítás:**

A Rolle-tételt alkalmazzuk az

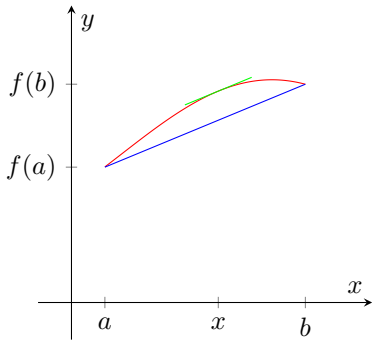
$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

függvényre.

$$0 = F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

és

$$F(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a) = F(a)$$



# Cauchy-tétel

Ha az  $f(x)$  és  $g(x)$  függvények az  $[a, b]$  intervallumon folytonosak, az  $(a, b)$ -n differenciálhatóak és  $g'(x) \neq 0$   $x \in (a, b)$  esetén, akkor van olyan  $x \in (a, b)$ , hogy

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

**Bizonyítás:**

A Rolle-tételt alkalmazzuk az

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g(x)$$

függvényre.

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(x)$$

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \left( f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g(b) \right) - \left( f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g(a) \right) = \\ &= f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(b) - g(a)) = 0 \end{aligned}$$

## Akikről eddig szó volt

Michel Rolle (1652–1719) francia

Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) olasz-francia

Augustin Louis Cauchy (1789–1857) francia

Guillaume de l'Hospital (1661–1704) francia

Brook Taylor (1685–1731) angol

Étienne Bézout (1730–1784) francia

Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) német

Bernard Bolzano (1781–1848) szudétanémet

Karl Weierstrass (1815–1897) német

# Aszimptoták

Az **aszimptota** olyan egyenes, melyet a függvény grafikonja tetszőlegesen megközelít.

Ez háromféle lehet:

- ▶ függőleges aszimptota
- ▶ vízszintes aszimptota
- ▶ ferde aszimptota

# Függőleges aszimptota

Az  $f(x)$  függvénynek **függőleges aszimptotája** van az  $x_0$  pontban, ha  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ , esetleg csak az egyik oldali határérték.

Ekkor az  $x = x_0$  egyenletű egyenes az aszimptota.

Példák:

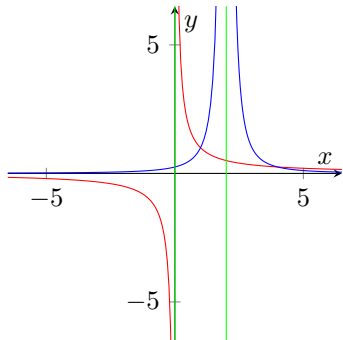
Az  $f(x) = \frac{1}{x}$  függvénynek az  $x_0 = 0$  pontban függőleges aszimptotája van.

Egyenlete:  $x = 0$ .

Az  $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$  függvénynek

az  $x_0 = 2$  pontban függőleges aszimptotája van.

Egyenlete:  $x = 2$ .



# Vízszintes aszimptota

Az  $f(x)$  függvénynek **vízszintes aszimptotája** van, ha  $\pm\infty$ -ben a határértéke egy véges szám.

Ha  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ , akkor az  $y = a$  egyenletű egyenes a vízszintes aszimptota a  $+\infty$ -ben.

A  $-\infty$ -ben hasonlóan definiáljuk.

Példák:

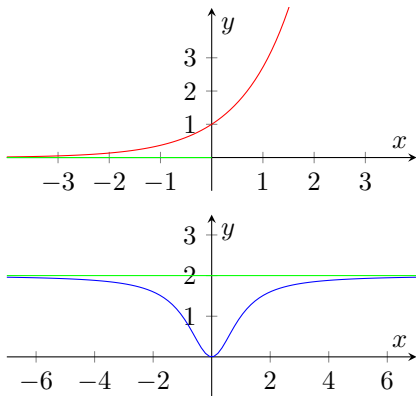
Az  $f(x) = e^x$  függvénynek az  $y = 0$  egyenes vízszintes aszimptotája a  $-\infty$ -ben.

Az  $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$  függvénynek a határértéke a végtelenben:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{x^2}} = 2,$$

így az  $y = 2$  egyenletű egyenes a vízszintes aszimptotája a  $+\infty$ -ben.

A  $-\infty$ -ben hasonlóan ugyanez az egyenes.





# Ferde aszimptota

Az  $f(x)$  függvénynek **ferde aszimptotája** van, ha a függvénygrafikon az  $y = ax + b$  egyeneshez „simul” a végtelenben.

Az  $a$  és a  $b$  együtthatók kiszámítása:

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

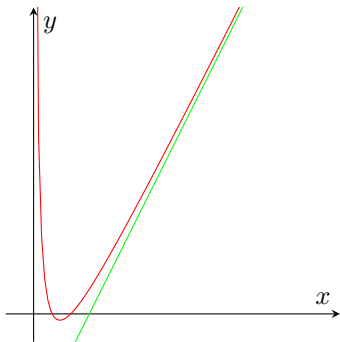
$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$$

A  $-\infty$ -ben hasonlóan számítható.

Ha valamelyik határérték nem létezik vagy végtelen, akkor nincs ferde aszimptota.

Az  $a$  értékét gyakran a L'Hospital-szabály segítségével számolhatjuk ki:

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$$



## Ferde aszimptota – példák

Az  $f(x) = \frac{2x^2 - 6x + 4}{x}$  függvény ferde aszimptotái

## Ferde aszimptota – példák

Az  $f(x) = \frac{2x^2 - 6x + 4}{x}$  függvény ferde aszimptotái

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2 - 6x + 4}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 6x + 4}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 2 - \frac{6}{x} + \frac{4}{x^2} \right) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 - 6x + 4}{x} - 2x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 6x + 4 - 2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x + 4}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( -6 + \frac{4}{x} \right) = -6 \end{aligned}$$

Tehát a ferde aszimptota egyenlete:  $y = 2x - 6$ .

Hasonlóan a  $-\infty$ -ben is.

Az  $f(x) = x^2$  függvény ferde aszimptotái

## Ferde aszimptota – példák

Az  $f(x) = \frac{2x^2 - 6x + 4}{x}$  függvény ferde aszimptotái

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2 - 6x + 4}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 6x + 4}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 2 - \frac{6}{x} + \frac{4}{x^2} \right) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 - 6x + 4}{x} - 2x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 6x + 4 - 2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x + 4}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( -6 + \frac{4}{x} \right) = -6 \end{aligned}$$

Tehát a ferde aszimptota egyenlete:  $y = 2x - 6$ .

Hasonlóan a  $-\infty$ -ben is.

Az  $f(x) = x^2$  függvény ferde aszimptotái

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = +\infty,$$

tehát ebben az esetben nem létezik ferde aszimptota.

## Feladat

Milyen aszimptotái vannak az  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$  függvénynek?

## Feladat

Milyen aszimptotái vannak az  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$  függvénynek?

Függőleges aszimptotája nincs (mindenütt értelmes és folytonos).

A határértéke:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty,$$

így csak ferde aszimptotája lehet.

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$$

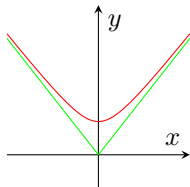
$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 1} - x = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0 \end{aligned}$$

Így az aszimptota egyenlete a  $+\infty$ -ben  $y = x$ .

## Feladat – folytatás

A  $-\infty$ -ben hasonlóan számolhatunk,  
de figyelni kell az előjelekre:

$$\begin{aligned}a &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \\&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{-|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{-1} = -1 \\b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - ax = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} + x = \\&= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x) \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \\&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = 0\end{aligned}$$



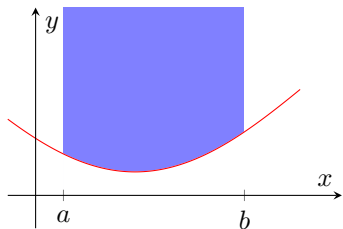
Így az aszimptota egyenlete a  $-\infty$ -ben  $y = -x$ .

# Konvexitás

Egy  $K \subseteq \mathbb{R}^2$  halmaz konvex, ha bármely  $P, Q \in K$  pontra a  $PQ$  szakasz teljes egészében benne van a  $K$ -ban.

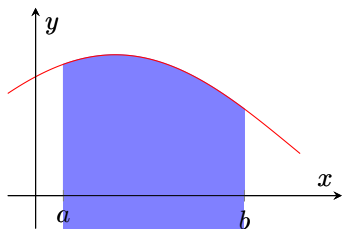
Az  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$  függvény ( $D_f \subseteq \mathbb{R}$ ) az  $[a, b] \subseteq D_f$  intervallumon **konvex**, ha a grafikonja feletti tartomány konvex:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b] \text{ és } y \geq f(x)\}$$



Az  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$  függvény ( $D_f \subseteq \mathbb{R}$ ) az  $[a, b] \subseteq D_f$  intervallumon **konkáv**, ha a grafikonja alatti tartomány konvex:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b] \text{ és } y \leq f(x)\}$$





# Ekvivalens tulajdonságok a konvexitásra

Az  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$  függvény ( $D_f \subseteq \mathbb{R}$ ) az  $[a, b] \subseteq D_f$  intervallumon pontosan akkor konvex, ha

- ▶ minden  $x, y \in [a, b]$ -re az  $(x, f(x))$  és az  $(y, f(y))$  pontokat összekötő szakasz a grafikon felett van, azaz

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \geq f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \quad \text{minden } \lambda \in [0, 1]\text{-re.}$$

- ▶ a függvénygrafikon az érintő felett halad, azaz

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{minden } x, x_0 \in [a, b] \text{ esetén.}$$

- ▶ az érintő meredeksége, azaz  $f'(x)$  monoton nő az  $[a, b]$  intervallumon.
- ▶  $f''(x) \geq 0$  az  $[a, b]$  intervallumon.

# Ekvivalens tulajdonságok a konkávitásra

Az  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$  függvény ( $D_f \subseteq \mathbb{R}$ ) az  $[a, b] \subseteq D_f$  intervallumon pontosan akkor konkáv, ha

- ▶ minden  $x, y \in [a, b]$ -re az  $(x, f(x))$  és az  $(y, f(y))$  pontokat összekötő szakasz a grafikon alatt van, azaz

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \leq f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \quad \text{minden } \lambda \in [0, 1]\text{-re.}$$

- ▶ a függvénygrafikon az érintő alatt halad, azaz

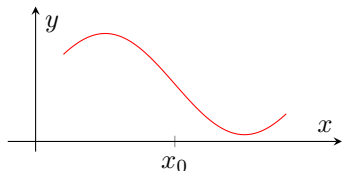
$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{minden } x, x_0 \in [a, b] \text{ esetén.}$$

- ▶ az érintő meredeksége, azaz  $f'(x)$  monoton csökken az  $[a, b]$  intervallumon.
- ▶  $f''(x) \leq 0$  az  $[a, b]$  intervallumon.

# Inflexiós pont

Az  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$  függvény ( $D_f \subseteq \mathbb{R}$ )  $x_0 \in D_f$  pontja inflexiós pont, ha a függvény  $x_0$ -ban differenciálható, és a függvény  $x_0$ -ban konvexitást vált, azaz előtte konkáv, utána konvex vagy fordítva.

Formálisan: van olyan  $\delta > 0$ , hogy  $[x_0 - \delta, x_0]$ -ban konkáv és  $[x_0, x_0 + \delta]$ -ban konvex vagy fordítva.



Példa:

A  $\sin x$  függvénynek a  $\pi$  egész számú többszörösei az inflexiós pontjai.

Tétel:

Ha az  $x_0$  inflexiós pont, akkor  $f''(x_0) = 0$ .

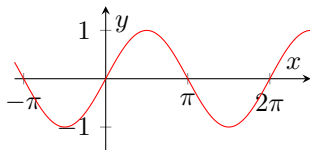
Ez visszafelé nem feltétlenül igaz:

$$f(x) = x^4$$

$$f'(x) = 4x^3$$

$$f''(x) = 12x^2 \text{ így } f''(0) = 0,$$

de a 0 nem inflexiós pont (a függvény mindenütt konvex).



# Példa

Az  $f(x) = \frac{1}{x}$  függvény konvexitása.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

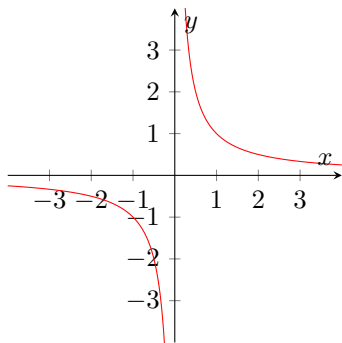
$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

A második derivált sehol sem 0, így nincs inflexiós pont.

A második derivált előjeléből leolvashatjuk a konvexitást:

|       | $x < 0$ | 0     | $0 < x$ |
|-------|---------|-------|---------|
| $f''$ | -       | n. é. | +       |
| $f$   | konkáv  | n. é. | konvex  |



## Feladat

Az  $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x + 3$  függvény konvexitása.

# Feladat

Az  $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x + 3$  függvény konvexitása.  
Kiszámoljuk a függvény második deriváltját:

$$f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x + 3$$

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 2$$

$$f''(x) = 12x^2 - 6x - 6$$

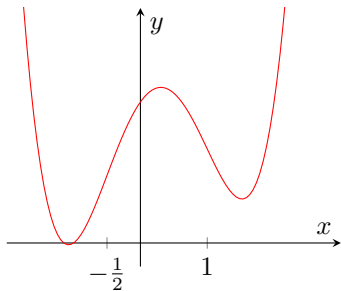
A második derivált nullhelyei:

$$f''(x) = 0$$

$$12x^2 - 6x - 6 = 0$$

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = -\frac{1}{2}$$



A második derivált előjeléből leolvashatjuk a konvexitást:

|       | $x < -\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2} < x < 1$ | 1         | $1 < x$ |
|-------|--------------------|----------------|------------------------|-----------|---------|
| $f''$ | +                  | 0              | -                      | 0         | +       |
| $f$   | konvex             | inf. pont      | konkáv                 | inf. pont | konvex  |