15. előadás

Függvényvizsgálat I.

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2024. november 5.

Függvényvizsgálat lépései

Adott egy $f(x)$ függvény, megállapítjuk:

- értelmezési tartomány
- zérushely
- paritás
- periodicitás
- értelmezési tartomány szélein határértékek
  - aszimptoták
- első derivált
  - monotonitási tulajdonságok
  - lokális szélsőértékek
- második derivált
  - konvexitás
  - inflexiós pontok
- sematikus ábrázolás
- értékkészlet

Az e^{-x^2} függvény vizsgálata

Legyen $f(x) = e^{-x^2}$ (Gauss- vagy haranggörbe).

Az e^{-x^2} függvény vizsgálata

Legyen $f(x) = e^{-x^2}$ (Gauss- vagy haranggörbe).

- értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$
- zérushely: nincs, mindenütt pozitív
- paritás:
$$f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x),$$
  tehát páros
- periodicitás: nem periodikus (visszatérünk)
- értelmezési tartomány szélein határértékek:
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{-x^2} = 0, \text{ mert } \lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{-x^2} = 0$$

  Így vízszintes aszimptota van a $\pm\infty$-ben: $y = 0$ egyenes.

Az e^{-x^2} függvény vizsgálata – folytatás

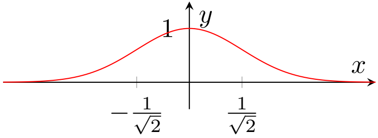
- első derivált:
$$f'(x) = e^{-x^2}(-2x),$$
melynek 0-ban van nullhelye

	$x<0$	0	$0<x$
f'	$+$	0	$-$
f	monoton nő	lok. max.	monoton csökken

Az $x=0$-ban lokális maximum van, melynek értéke: $f(0)=e^0=1$.

- második derivált:
$$f''(x) = e^{-x^2}(-2x)(-2x) + e^{-x^2}(-2) = (4x^2-2)e^{-x^2},$$
melynek nullhelyei: $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

	$x<-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}<x$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	konvex	inf. pont	konkáv	inf. pont	konvex



- értékkészlet: $(0,1]$

$$f(x) = x^3 - 3x - 2$$

$f(x) = x^3 - 3x - 2$

- értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$
- zérushely: racionális gyökök csak a 2 osztói lehetnek: $\pm 1, \pm 2$, melyek közül 2 és a -1 gyök, utóbbi kétszeres. Így a függvény szorzat alakja:

$$f(x) = x^3 - 3x - 2 = (x+1)^2(x-2)$$

- paritás:

$$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) - 2 = -x^3 + 3x - 2 = -f(x) - 4,$$

  tehát (valószínűleg) nincs paritása,
  hivatkozhatunk a nullhelyekre is (nem szimmetrikusak az origóra), vagy $f(1) = -4$ és $f(-1) = 0$ se nem egyenlőek, se nem ellentettek.
- periodicitás: nem periodikus (véges sok nullhely)

$f(x) = x^3 - 3x - 2$

- értelmezési tartomány szélein határértékek:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^3 - 3x - 2 = \lim_{x\to\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 - 3x - 2 = \lim_{x\to-\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = -\infty$$

Ferde aszimptota van-e?

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 3x - 2}{x} = \lim_{x\to\infty} x^2 - 3 - \frac{2}{x} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} x^2 \left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = +\infty,$$

így nincs ferde aszimptota a $+\infty$-ben.
Hasonló számolással kapjuk, hogy a $-\infty$-ben sincsen.

$f(x) = x^3 - 3x - 2$

- első derivált: $f'(x) = 3x^2 - 3$,
  melynek $x^2 = 1$ esetén, azaz ± 1-ben van nullhelye

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	nő	max	csökken	min	nő

  Tehát a -1 lokális maximumhely, értéke: $f(-1) = 0$,
  míg az 1 lokális minimumhely, értéke: $f(1) = -4$.

- második derivált: $f''(x) = 3 \cdot 2x = 6x$, melynek nullhelye a 0.

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
f''	$-$	0	$+$
f	konkáv	inf. pont	konvex

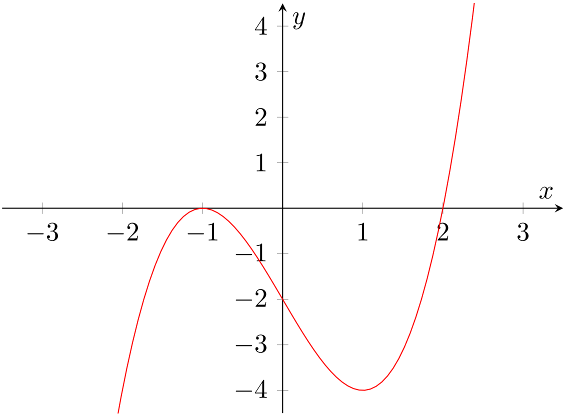
Ugyanezek egyetlen táblázatban:

<table>
<tr><td></td><td>$(-\infty, -1)$</td><td>-1</td><td>$(-1, 0)$</td><td>0</td><td>$(0, 1)$</td><td>1</td><td>$(1, +\infty)$</td></tr>
<tr><td>f'</td><td>$+$
nő</td><td>0
max</td><td colspan="3">$-$
csökken</td><td>0
min</td><td>$+$
nő</td></tr>
<tr><td>f''</td><td colspan="3">$-$
konkáv</td><td>0
inf. pont</td><td colspan="3">$+$
konvex</td></tr>
</table>

$f(x) = x^3 - 3x - 2$

A táblázat:

<table>
<tr><th></th><th>$(-\infty, -1)$</th><th>-1</th><th>$(-1, 0)$</th><th>0</th><th>$(0, 1)$</th><th>1</th><th>$(1, +\infty)$</th></tr>
<tr><td>f'</td><td>$+$
nő</td><td>0
max</td><td colspan="3">$-$
csökken</td><td>0
min</td><td>$+$
nő</td></tr>
<tr><td>f''</td><td colspan="3">$-$
konkáv</td><td>0
inf. pont</td><td colspan="3">$+$
konvex</td></tr>
</table>



- értékkészlet: $\mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x^2}$$

$f(x) = \frac{x^3+1}{x^2}$

- értelmezési tartomány: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- zérushely: $x^3 + 1 = 0$ esetén, azaz $x = -1$.
- paritás: nincsen, hiszen ha lenne, akkor 1 is nullhely lenne.
- periodicitás: nem periodikus (csak egy nullhely)
- értelmezési tartomány szélein határértékek:

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{x^3 + 1}{x^2} = +\infty$$
$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} \frac{x^3 + 1}{x^2} = +\infty$$

Tehát az $x = 0$-ban függőleges aszimptota van.

$f(x) = \frac{x^3+1}{x^2}$

- értelmezési tartomány szélein határértékek (folytatás):

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1}{x^2} = \lim_{x\to\infty} x + \frac{1}{x^2} = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+1}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} x + \frac{1}{x^2} = -\infty$$

Ferde aszimptota van-e?

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3+1}{x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1}{x^3} = \lim_{x\to\infty} 1 + \frac{1}{x^3} = 1$$
$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3+1}{x^2} - x\right) =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1-x^3}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

így az $y = x$ egyenletű egyenes a ferde aszimptota a $+\infty$-ben.
Hasonló számolással kapjuk, hogy a $-\infty$-ben is az $y = x$ egyenletű egyenes a ferde aszimptota.

$f(x) = \frac{x^3+1}{x^2}$

- első derivált:

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot x^2 - (x^3+1) \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{3x^4 - 2x^4 - 2x}{(x^2)^2} = \frac{x^4 - 2x}{x^4} = \frac{x^3 - 2}{x^3},$$

melynek $\sqrt[3]{2}$-ben van nullhelye.

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \sqrt[3]{2})$	$\sqrt[3]{2}$	$(\sqrt[3]{2}, +\infty)$
f'	$+$	n. é.	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	n. é.	$\searrow$	min	$\nearrow$

Tehát a $\sqrt[3]{2}$ lokális minimumhely, értéke:

$$f\left(\sqrt[3]{2}\right) = \frac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3+1}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2} = 3 \cdot 2^{-\frac{2}{3}} \approx 1{,}89.$$

- második derivált:

$$f''(x) = \frac{3x^2 \cdot x^3 - (x^3-2) \cdot 3x^2}{(x^3)^2} = \frac{3x^5 - (3x^5 - 6x^2)}{x^6} = \frac{6x^2}{x^6} = \frac{6}{x^4},$$

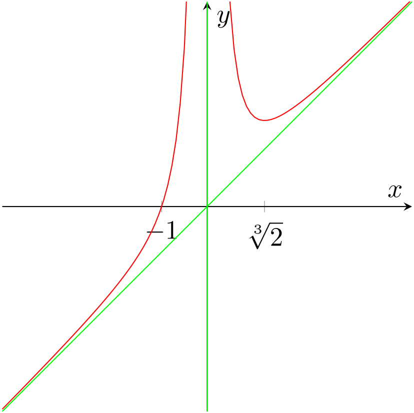
melynek nincs nullhelye.

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
f''	$+$	n. é.	$+$
f	$\smile$	n. é.	$\smile$

$f(x) = \frac{x^3+1}{x^2}$

- Az előzőek egyetlen táblázatban:

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \sqrt[3]{2})$	$\sqrt[3]{2}$	$(\sqrt[3]{2}, +\infty)$
f'	$+$	n. é.	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	n. é.	$\searrow$	min	$\nearrow$
f''	$+$	n. é.		$+$	
f	$\smile$	n. é.		$\smile$	



- értékkészlet: $\mathbb{R}$