16. előadás

Függvényvizsgálat II.

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2024. november 6.

Függvényvizsgálat

Adott egy $f(x)$ függvény, megállapítjuk:

- értelmezési tartomány
- zérushely
- paritás
- periodicitás
- értelmezési tartomány szélein határértékek
  - aszimptoták
- első derivált
  - monotonitási tulajdonságok
  - lokális szélsőértékek
- második derivált
  - konvexitás
  - inflexiós pontok
- sematikus ábrázolás
- értékkészlet

$f(x) = x - \operatorname{arctg} x$

$f(x) = x - \operatorname{arctg} x$

- értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$
- zérushely: $x = 0$-ban zérus a függvény, más nullhely nincs, mert látni fogjuk, hogy szigorúan monoton nő.
- paritás: páratlan (felhasználva, hogy az arctg függvény páratlan):

$$f(-x) = -x - \operatorname{arctg}(-x) = -x - (-\operatorname{arctg} x) = -f(x)$$

- periodicitás: nem periodikus (csak egy zérushely)

$f(x) = x - \operatorname{arctg} x$

- értelmezési tartomány szélein határértékek:

$$\lim_{x \to +\infty} x - \operatorname{arctg} x = +\infty \text{ (mert az } \operatorname{arctg} \text{ függvény korlátos)}$$
$$\lim_{x \to -\infty} x - \operatorname{arctg} x = -\infty \text{ (mert az } \operatorname{arctg} \text{ függvény korlátos)}$$

aszimptoták (ferde aszimptoták lehetnek):

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x \to \infty} 1 - \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$
$$b = \lim_{x \to \infty} f(x) - ax = \lim_{x \to \infty} x - \operatorname{arctg} x - x = \lim_{x \to \infty} -\operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$$

Tehát az aszimptota egyenlete a $+\infty$-ben $y = x - \frac{\pi}{2}$.

$$a = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x \to -\infty} 1 - \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$
$$b = \lim_{x \to -\infty} f(x) - ax = \lim_{x \to -\infty} x - \operatorname{arctg} x - x = \lim_{x \to -\infty} -\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$$

Tehát az aszimptota egyenlete a $-\infty$-ben $y = x + \frac{\pi}{2}$.

$f(x) = x - \operatorname{arctg} x$

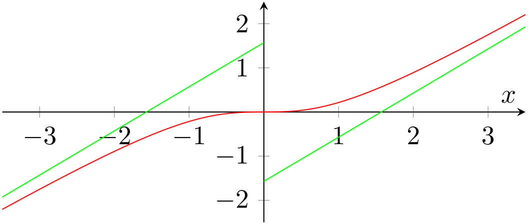
- első és második derivált:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2x(1+x^2) - x^2 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2x + 2x^3 - 2x^3}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

	$x < 0$	0	$0 < x$
f'	$+$	0	$+$
f	monoton nő	$-$	monoton nő
f''	$-$	0	$+$
f	konkáv	i.p.	konvex

A 0-ban nincs lokális szélsőérték, a függvény monoton nő $\mathbb{R}$-en.



- értékkészlet $\mathbb{R}$

$$f(x) = \left(\frac{x-1}{2x+1}\right)^2$$

$f(x) = \left(\frac{x-1}{2x+1}\right)^2$

- ÉT: $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ (mert $2x+1 \neq 0$)
- zérushely: $x = 1$
- paritás: nincs ($f(1) = 0$, de $f(-1) \neq 0$)
- periódus: nincs (egyetlen zérushely miatt)
- határértékek:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-1}{2x+1}\right)^2 = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1-\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x}}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x-1}{2x+1}\right)^2 = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1-\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x}}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

A függvénynek $\pm\infty$-ben az $y = \frac{1}{4}$ vízszintes aszimptotája van.

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}+} \left(\frac{x-1}{2x+1}\right)^2 = \lim_{x\to-\frac{1}{2}+} \frac{\frac{9}{4}}{(2x+1)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}-} \left(\frac{x-1}{2x+1}\right)^2 = \lim_{x\to-\frac{1}{2}-} \frac{\frac{9}{4}}{(2x+1)^2} = +\infty$$

A függvénynek $x = -\frac{1}{2}$-ben függőleges aszimptotája van.

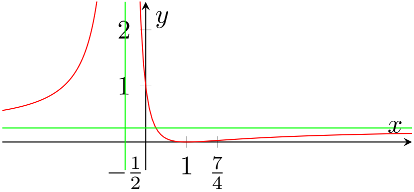
$f(x) = \left(\frac{x-1}{2x+1}\right)^2$

$$f'(x) = 2\frac{x-1}{2x+1} \cdot \frac{2x+1-(x-1)\cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{6(x-1)}{(2x+1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{6(2x+1)^3 - 6(x-1)\cdot 3(2x+1)^2 \cdot 2}{(2x+1)^6} = \frac{6(2x+1) - 36(x-1)}{(2x+1)^4} =$$

$$= \frac{-24x+42}{(2x+1)^4}$$

	$x < -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x < 1$	1	$1 < x < \frac{7}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{7}{4} < x$
f'	$+$ mon. nő	n. é. n. é.	$-$ mon. csök.	0 min.	$+$ monoton nő		
f''	$+$ konvex	n. é. n. é.	$+$ konvex			0 i. p.	$-$ konkáv



lokális minimum: $f(1) = 0$

ÉK: $[0, +\infty)$

$f(x) = x^x$

$$f(x) = x^x = \left(e^{\ln x}\right)^x = e^{x \ln x}$$

$f(x) = x^x = \left(e^{\ln x}\right)^x = e^{x \ln x}$

- ÉT: $(0, +\infty)$ (illetve negatív egész számokon is értelmezhető)
- zérushely: nincs (a függvény mindenütt pozitív)
- paritás: nincs (a függvény csak a pozitív számokon van értelmezve)
- periódus: nincs (a függvény csak a pozitív számokon van értelmezve)
- határértékek:

$$\lim_{x \to 0+} x^x = \lim_{x \to 0+} e^{x \ln x} = e^0 = 1, \text{ mert}$$

$$\lim_{x \to 0+} x \ln x = \lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \rightsquigarrow \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0+} -x = 0 \text{ (L'Hospital-szabály)}$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^x = +\infty$$

Így a $+\infty$-ben lehetne ferde aszimptota, de

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^x}{x} = \lim_{x \to \infty} x^{x-1} = +\infty$$

miatt nincsen.

$f(x) = x^x = \left(e^{\ln x}\right)^x = e^{x\ln x}$

- Deriváltak:

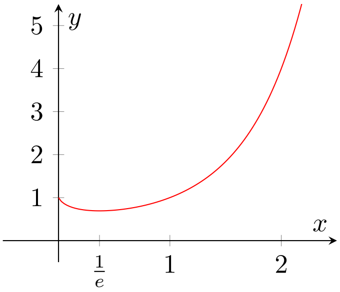
$$f'(x) = e^{x\ln x}\left(\ln x + x\frac{1}{x}\right) = e^{x\ln x}(\ln x + 1)$$

$$f''(x) = e^{x\ln x}(\ln x + 1)^2 + e^{x\ln x}\frac{1}{x}$$

Az első derivált $\ln x + 1 = 0$ esetén nulla, azaz $x = \frac{1}{e}$ a nullhely.
A második derivált a pozitív számokon pozitív.

	$0 < x < \frac{1}{e}$	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e} < x$
f'	$-$ mon. csök.	0 min.	$+$ mon. nő
f''	$+$ konvex		

lokális minimum: $f\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-\frac{1}{e}} \approx 0{,}692$



- ÉK: $\left[e^{-\frac{1}{e}}, +\infty\right)$