17. előadás

Integrálszámítás

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2024. november 12.

Primitív függvény

Az $F(x)$ függvény az $f(x)$ függvény primitív függvénye az I nyílt intervallumon, ha $F'(x) = f(x)$ teljesül minden $x \in I$-re.
Szokás antideriváltnak is nevezni.

Általában a megfelelő nagybetűvel jelöljük a primitív függvényt.

Példa:
$f(x) = 3x^2$ esetén $F(x) = x^3$ vagy $F(x) = x^3 + 1$ vagy $F(x) = x^3 + 2$, igazándiból bármilyen $C \in \mathbb{R}$-re $F(x) = x^3 + C$ jó.

Tétel:
Ha $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$ az I intervallumon, akkor van olyan $C \in \mathbb{R}$, hogy $F_1(x) = F_2(x) + C$.

Ezt a tételt a Lagrange-féle középértéktétellel lehet bizonyítani.
(Csak azt kell megmutatni, hogy $(F_1 - F_2)'(x) = 0$-ból következik, hogy $F_1 - F_2$ konstans.)

Tétel:
Ha az $f(x)$ függvény folytonos, akkor van primitív függvénye.
Csak kérdés, hogy fel tudjuk-e írni:
Az $f(x) = e^{-x^2}$ függvénynek van primitív függvénye, de nem tudjuk felírni az általunk ismert függvényekkel.

Határozatlan integrál

Az f függvény primitív függvényeinek összességét határozatlan integrálnak nevezzük,
jelölése: $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Példa:

$$\int 3x^2\,\mathrm{d}x = \left\{x^3 + C \mid C \in \mathbb{R}\right\}$$
$$= x^3 + C$$

Műveleti tulajdonságok

Tétel:

$$\int f(x) + g(x)\ \mathrm{d}x = \int f(x)\ \mathrm{d}x + \int g(x)\ \mathrm{d}x$$

$$\int f(x) - g(x)\ \mathrm{d}x = \int f(x)\ \mathrm{d}x - \int g(x)\ \mathrm{d}x$$

$$\int cf(x)\ \mathrm{d}x = c\int f(x)\ \mathrm{d}x \qquad c \in \mathbb{R}$$

Sajnos szorzásra, hányadosra nincs ilyen egyszerű szabály.

Elemi függvények integráljai

Mivel $(x)' = 1$, így $\int 1 \, \mathrm{d}x = x + C$.

$(x^n)' = nx^{n-1}$, így

$$\int nx^{n-1} \, \mathrm{d}x = x^n + C$$

$$\int x^{n-1} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n}x^n + C, \qquad \text{ha } n \neq 0$$

$$\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C, \qquad \text{ha } n \neq -1$$

Tudjuk, hogy $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, ha $x > 0$, így

$$\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln x + C, \qquad \text{ha } x > 0$$

$$\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln |x| + C, \qquad \text{ha } x \neq 0$$

Elemi függvények integráljai – táblázat

$f(x)$	$\int f(x)\ \mathrm{d}x$	
x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$n \neq 1$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\|x\| + C$	$x \neq 0$
$\cos x$	$\sin x + C$	
$\sin x$	$-\cos x + C$	
e^x	$e^x + C$	
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x + C$	
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x + C$	
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + C$	
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$	$\|x\| < 1$

Példák

$$\int x^3 + 4x^2 - 5 \ \mathrm{d}x =$$

Példák

$$\int x^3 + 4x^2 - 5 \, \mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3} - 5x + C$$

Példák

$$\int x^3 + 4x^2 - 5 \,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3} - 5x + C$$

$$\int x^2\sqrt{x} \,\mathrm{d}x =$$

Példák

$$\int x^3 + 4x^2 - 5 \, \mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3} - 5x + C$$

$$\int x^2\sqrt{x} \, \mathrm{d}x = \int x^{2,5} \, \mathrm{d}x = \frac{x^{3,5}}{3{,}5} + C = \frac{2}{7}x^{3,5} + C$$

Feladat

Határozzuk meg azt az $f(x)$ függvényt, melyre

$$f'(x) = \cos x \quad \text{és} \quad f(0) = 5.$$

Feladat

Határozzuk meg azt az $f(x)$ függvényt, melyre

$$f'(x) = \cos x \quad \text{és} \quad f(0) = 5.$$

$$f'(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f(x) = \sin x + C$$

$$f(0) = \sin 0 + C = C \quad \Rightarrow \quad C = 5$$

$$f(x) = \sin x + 5$$

Feladat

Határozzuk meg azt az $f(x)$ függvényt, melyre

$$f''(x) = x \quad \text{és} \quad f'(2) = 1 \quad \text{és} \quad f(1) = 0.$$

Feladat

Határozzuk meg azt az $f(x)$ függvényt, melyre

$$f''(x) = x \quad \text{és} \quad f'(2) = 1 \quad \text{és} \quad f(1) = 0.$$

$$f''(x) = x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$f'(2) = \frac{2^2}{2} + C_1 = 2 + C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -1$$

$$f'(x) = \frac{x^2}{2} - 1$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - x + C_2 = \frac{x^3}{6} - x + C_2$$

$$f(1) = \frac{1}{6} - 1 + C_2 = -\frac{5}{6} + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{5}{6}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{6} - x + \frac{5}{6}$$

További feladatok

$$\int \cos(2x)\ \mathrm{d}x =$$

További feladatok

$$\int \cos(2x)\ \mathrm{d}x = \frac{\sin(2x)}{2} + C,$$

mivel $(\sin(2x))' = \cos(2x) \cdot 2$.

További feladatok

$$\int \cos(2x)\ \mathrm{d}x = \frac{\sin(2x)}{2} + C,$$

mivel $(\sin(2x))' = \cos(2x) \cdot 2.$

$$\int \sin^2(x)\ \mathrm{d}x =$$

További feladatok

$$\int \cos(2x)\ \mathrm{d}x = \frac{\sin(2x)}{2} + C,$$

mivel $(\sin(2x))' = \cos(2x) \cdot 2$.

$$\int \sin^2(x)\ \mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}\ \mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C$$

További feladatok

$$\int \cos(2x)\ \mathrm{d}x = \frac{\sin(2x)}{2} + C,$$

mivel $(\sin(2x))' = \cos(2x) \cdot 2$.

$$\int \sin^2(x)\ \mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}\ \mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C$$

$$\int \frac{1}{x-2}\ \mathrm{d}x =$$

További feladatok

$$\int \cos(2x)\ \mathrm{d}x = \frac{\sin(2x)}{2} + C,$$

mivel $(\sin(2x))' = \cos(2x) \cdot 2$.

$$\int \sin^2(x)\ \mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}\ \mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C$$

$$\int \frac{1}{x-2}\ \mathrm{d}x = \ln|x-2| + C$$

További feladatok

$$\int \cos(2x)\ \mathrm{d}x = \frac{\sin(2x)}{2} + C,$$

mivel $(\sin(2x))' = \cos(2x) \cdot 2$.

$$\int \sin^2(x)\ \mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}\ \mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C$$

$$\int \frac{1}{x-2}\ \mathrm{d}x = \ln|x-2| + C$$

$$\int \frac{1}{(x-2)^2}\ \mathrm{d}x =$$

További feladatok

$$\int \cos(2x)\ \mathrm{d}x = \frac{\sin(2x)}{2} + C,$$

mivel $(\sin(2x))' = \cos(2x) \cdot 2$.

$$\int \sin^2(x)\ \mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}\ \mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C$$

$$\int \frac{1}{x-2}\ \mathrm{d}x = \ln|x-2| + C$$

$$\int \frac{1}{(x-2)^2}\ \mathrm{d}x = \frac{(x-2)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x-2} + C$$

További feladatok

$$\int \cos(2x)\ \mathrm{d}x = \frac{\sin(2x)}{2} + C,$$

mivel $(\sin(2x))' = \cos(2x) \cdot 2$.

$$\int \sin^2(x)\ \mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}\ \mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C$$

$$\int \frac{1}{x-2}\ \mathrm{d}x = \ln|x-2| + C$$

$$\int \frac{1}{(x-2)^2}\ \mathrm{d}x = \frac{(x-2)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x-2} + C$$

$$\int (2x-3)^{100}\ \mathrm{d}x =$$

További feladatok

$$\int \cos(2x)\ \mathrm{d}x = \frac{\sin(2x)}{2} + C,$$

mivel $(\sin(2x))' = \cos(2x) \cdot 2$.

$$\int \sin^2(x)\ \mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}\ \mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C$$

$$\int \frac{1}{x-2}\ \mathrm{d}x = \ln|x-2| + C$$

$$\int \frac{1}{(x-2)^2}\ \mathrm{d}x = \frac{(x-2)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x-2} + C$$

$$\int (2x-3)^{100}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x-3)^{101}}{101} + C = \frac{(2x-3)^{101}}{202} + C$$

Lineáris helyettesítés

Tétel (Lineáris helyettesítés):
Ha az $f(x)$ függvény primitív függvénye $F(x)$, akkor

$$\int f(ax+b)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$$

Bizonyítás:

$$\left(\frac{1}{a}F(ax+b)+C\right)' = \frac{1}{a}F'(ax+b)\cdot a = f(ax+b)$$

Példa:

$$\int \sin(5x-7)\ \mathrm{d}x =$$

Lineáris helyettesítés

Tétel (Lineáris helyettesítés):
Ha az $f(x)$ függvény primitív függvénye $F(x)$, akkor

$$\int f(ax+b)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

Bizonyítás:

$$\left(\frac{1}{a}F(ax+b) + C\right)' = \frac{1}{a}F'(ax+b)\cdot a = f(ax+b)$$

Példa:

$$\int \sin(5x-7)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{5}(-\cos(5x-7)) + C = -\frac{\cos(5x-7)}{5} + C$$

$a=5$, $b=-7$, $f(x)=\sin x$, $F(x)=-\cos x$

Két bevezető feladat

$$\int \frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 5}{x - 2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(x^2 - 2x - 1)(x - 2) + 3}{x - 2}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int x^2 - 2x - 1 + \frac{3}{x - 2}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{x^3}{3} - x^2 - x + 3\ln|x - 2| + C$$

$$\int \frac{1}{1 - x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(1 - x)(1 + x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x}\right)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\ln|1 - x| + \ln|1 + x|\right) + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 + x}{1 - x}\right| + C$$

Lehetett volna az arth ($|x| < 1$ esetén) vagy az arcth ($|x| > 1$ esetén) függvényeket is használni, de a fenti metódus általánosabb módszer.

Parciális törtekre bontás

Két polinom hányadosát integráljuk.

1. Polinomosztással elérjük, hogy a számláló kisebb fokú legyen, mint a nevező.
2. A nevezőt felbontjuk legfeljebb másodfokú irreducibilis polinomok szorzatára.
3. A törtet felírjuk egyszerűbb törtek összegeként.
4. Ezeket a törteket már tudjuk integrálni.

Példa:

$$\frac{5x^3 - 6x^2 + 43x - 44}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 14x + 9} = \frac{2}{x+1} - \frac{7}{(x+1)^2} + \frac{3x+1}{x^2 - 4x + 9},$$

mert $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 14x + 9 = (x+1)^2(x^2 - 4x + 9)$.

Másodfokú nevezőjű integrálása

Először teljes négyzetté alakítjuk a nevezőt: $x^2 - 4x + 9 = (x-2)^2 + 5$.

$$\frac{3x+1}{x^2-4x+9} = \frac{3(x-2)+7}{(x-2)^2+5} = \frac{3(x-2)}{(x-2)^2+5} + \frac{7}{(x-2)^2+5}$$

Az első tag integrálása:

$$\int \frac{3(x-2)}{(x-2)^2+5}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3}{2}\frac{1}{(x-2)^2+5}\cdot 2(x-2)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln\left((x-2)^2+5\right) + C$$

A második tagé:

$$\int \frac{7}{(x-2)^2+5}\,\mathrm{d}x = \int \frac{7}{5}\frac{1}{\left(\frac{x-2}{\sqrt{5}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{7}{5}\sqrt{5}\mathrm{arctg}\left(\frac{x-2}{\sqrt{5}}\right) + C$$

Így tehát:

$$\int \frac{3x+1}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln\left((x-2)^2+5\right) + \frac{7\sqrt{5}}{5}\mathrm{arctg}\left(\frac{x-2}{\sqrt{5}}\right) + C$$

Egy parciális törtekre bontás

$$\int \frac{x+5}{x^2-x-6}\,\mathrm{d}x = ?$$

Először felbontjuk a nevezőt:

$$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$$

Ekkor a törtet ilyen alakban szeretnénk előállítani:

$$\frac{x+5}{x^2-x-6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2},$$

ahol $A, B \in \mathbb{R}$. Ezeknek a meghatározásához beszorzunk a nevezővel:

$$x + 5 = A(x+2) + B(x-3)$$

A két oldalon álló polinom együtthatói megegyeznek:

$$1 = A + B$$
$$5 = 2A - 3B$$

Ebből az egyenletrendszerből azt kapjuk, hogy $A = \frac{8}{5}$ és $B = -\frac{3}{5}$. Tehát:

$$\int \frac{x+5}{x^2-x-6}\,\mathrm{d}x = \int \frac{8}{5}\frac{1}{x-3} - \frac{3}{5}\frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x = \frac{8}{5}\ln|x-3| - \frac{3}{5}\ln|x+2| + C$$

Feladat

$$\int \frac{x+1}{2+3x^2}\, \mathrm{d}x =$$

Feladat

$$\int \frac{x+1}{2+3x^2}\ \mathrm{d}x = \int \frac{x}{2+3x^2} + \frac{1}{2+3x^2}\ \mathrm{d}x$$

Az első tag integrálása:

$$\int \frac{x}{2+3x^2}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{6}\frac{1}{2+3x^2}\cdot 6x\ \mathrm{d}x = \frac{1}{6}\ln\left(2+3x^2\right) + C$$

Míg a másodiké:

$$\int \frac{1}{2+3x^2}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{3}{2}x^2}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x\right)^2}\ \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x\right) + C$$

Tehát a kérdéses integrál:

$$\int \frac{x+1}{2+3x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{6}\ln(2+3x^2) + \frac{1}{\sqrt{6}}\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x\right) + C$$