18. előadás

Helyettesítéses és parciális integrálás

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2024. november 13.

Bevezető feladatok

$$\int 2x \cos\left(x^2+3\right) \mathrm{d}x =$$

Bevezető feladatok

$$\int 2x \cos\left(x^2+3\right) \mathrm{d}x = \sin\left(x^2+3\right) + C$$

Bevezető feladatok

$$\int 2x \cos\left(x^2+3\right) \mathrm{d}x = \sin\left(x^2+3\right) + C$$

$$\int (\sin x)^3 \cos x \; \mathrm{d}x =$$

Bevezető feladatok

$$\int 2x \cos\left(x^2+3\right) \mathrm{d}x = \sin\left(x^2+3\right) + C$$

$$\int (\sin x)^3 \cos x \; \mathrm{d}x = \frac{(\sin x)^4}{4} + C$$

Bevezető feladatok

$$\int 2x \cos\left(x^2+3\right) \mathrm{d}x = \sin\left(x^2+3\right) + C$$

$$\int (\sin x)^3 \cos x \ \mathrm{d}x = \frac{(\sin x)^4}{4} + C$$

$$\int \operatorname{tg} x \ \mathrm{d}x =$$

Bevezető feladatok

$$\int 2x\cos\left(x^2+3\right)\,\mathrm{d}x = \sin\left(x^2+3\right)+C$$

$$\int (\sin x)^3 \cos x \; \mathrm{d}x = \frac{(\sin x)^4}{4} + C$$

$$\int \operatorname{tg} x \; \mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x} \; \mathrm{d}x = \int -(\cos x)^{-1}(-\sin x) \; \mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$$

Bevezető feladatok

$$\int 2x \cos\left(x^2+3\right) \mathrm{d}x = \sin\left(x^2+3\right) + C$$

$$\int (\sin x)^3 \cos x \ \mathrm{d}x = \frac{(\sin x)^4}{4} + C$$

$$\int \operatorname{tg} x \ \mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x} \ \mathrm{d}x = \int -(\cos x)^{-1}(-\sin x) \ \mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \operatorname{ctg} x \ \mathrm{d}x =$$

Bevezető feladatok

$$\int 2x\cos\left(x^2+3\right)\,\mathrm{d}x = \sin\left(x^2+3\right)+C$$

$$\int (\sin x)^3\cos x\ \mathrm{d}x = \frac{(\sin x)^4}{4}+C$$

$$\int \operatorname{tg} x\ \mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\ \mathrm{d}x = \int -(\cos x)^{-1}(-\sin x)\ \mathrm{d}x = -\ln|\cos x|+C$$

$$\int \operatorname{ctg} x\ \mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x}\ \mathrm{d}x = \ln|\sin x|+C$$

Első helyettesítési szabály

Összetett függvény deriválási szabálya:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Ebből egy integrálási szabály:

$$\int f'(g(x)) \cdot g'(x) \; \mathrm{d}x = f(g(x)) + C$$

Vagy $f(x)$ és $F(x)$ jelölésekkel (F az f primitív függvénye, azaz $F' = f$):

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \; \mathrm{d}x = F(g(x)) + C$$

Speciális eset, amikor $g(x) = ax + b$ alakú: lineáris helyettesítés:

$$\int f(ax + b) \cdot a \; \mathrm{d}x = F(ax + b) + C$$

Példa:

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \; \mathrm{d}x =$$

Első helyettesítési szabály

Összetett függvény deriválási szabálya:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Ebből egy integrálási szabály:

$$\int f'(g(x)) \cdot g'(x) \, \mathrm{d}x = f(g(x)) + C$$

Vagy $f(x)$ és $F(x)$ jelölésekkel (F az f primitív függvénye, azaz $F' = f$):

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \, \mathrm{d}x = F(g(x)) + C$$

Speciális eset, amikor $g(x) = ax + b$ alakú: lineáris helyettesítés:

$$\int f(ax + b) \cdot a \, \mathrm{d}x = F(ax + b) + C$$

Példa:

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x = \int 2 \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x = 2e^{\sqrt{x}} + C$$

$g(x) = \sqrt{x}$, $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f(x) = e^x$, $F(x) = e^x$

Parciális integrálás

Leibniz-szabály:

$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = (fg)'(x)$$

Ebből:

$$\int f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\ \mathrm{d}x = f(x)g(x) + C$$

Átrendezve:

$$\int f(x)g'(x)\ \mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\ \mathrm{d}x$$

Ezt nevezzük parciális integrálásnak.

Példa:

$$\int x \cos x \,\mathrm{d}x =$$

$$\begin{array}{ll} f(x) = x & f'(x) = \\ g'(x) = \cos x & g(x) = \end{array}$$

Parciális integrálás

Leibniz-szabály:

$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = (fg)'(x)$$

Ebből:

$$\int f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\ \mathrm{d}x = f(x)g(x) + C$$

Átrendezve:

$$\int f(x)g'(x)\ \mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\ \mathrm{d}x$$

Ezt nevezzük parciális integrálásnak.

Példa:

$$\int x\cos x\ \mathrm{d}x = x\sin x - \int \sin x\ \mathrm{d}x = x\sin x - (-\cos x) + C = x\sin x + \cos x + C$$

$$\begin{array}{ll} f(x) = x & f'(x) = 1 \\ g'(x) = \cos x & g(x) = \sin x \end{array}$$

Többszörös alkalmazás

$$\int x^2 e^{3x}\ \mathrm{d}x =$$

Többszörös alkalmazás

$$\int x^2 e^{3x}\ \mathrm{d}x = x^2\frac{e^{3x}}{3} - \int 2x\frac{e^{3x}}{3}\ \mathrm{d}x = \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{3}\int x e^{3x}\ \mathrm{d}x$$

$f(x) = x^2 \qquad f'(x) = 2x$

$g'(x) = e^{3x} \quad g(x) = \frac{e^{3x}}{3}$

Egy újabb parciális integrálás:

$$\int x e^{3x}\ \mathrm{d}x =$$

Többszörös alkalmazás

$$\int x^2 e^{3x}\ \mathrm{d}x = x^2\frac{e^{3x}}{3} - \int 2x\frac{e^{3x}}{3}\ \mathrm{d}x = \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}\ \mathrm{d}x$$

$$\begin{array}{ll} f(x) = x^2 & f'(x) = 2x \\ g'(x) = e^{3x} & g(x) = \frac{e^{3x}}{3} \end{array}$$

Egy újabb parciális integrálás:

$$\int xe^{3x}\ \mathrm{d}x = x\frac{e^{3x}}{3} - \int 1\frac{e^{3x}}{3}\ \mathrm{d}x = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + C$$

$$\begin{array}{ll} f(x) = x & f'(x) = 1 \\ g'(x) = e^{3x} & g(x) = \frac{e^{3x}}{3} \end{array}$$

Ezzel:

$$\int x^2 e^{3x}\ \mathrm{d}x = \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}\ \mathrm{d}x = \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{xe^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + C\right) =$$

$$= \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2xe^{3x}}{9} + \frac{2e^{3x}}{27} + C$$

Egy érdekesség

$$\int e^x \sin(2x)\mathrm{d}x = \sin(2x)e^x - \int 2\cos(2x)e^x\mathrm{d}x = e^x\sin(2x) - 2\int e^x\cos(2x)\mathrm{d}x$$

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sin(2x) & f'(x) = 2\cos(2x) \\ g'(x) = e^x & g(x) = e^x \end{array}$$

$$\int e^x \cos(2x)\mathrm{d}x = \cos(2x)e^x - \int -2\sin(2x)e^x\mathrm{d}x = e^x\cos(2x) + 2\int e^x\sin(2x)\mathrm{d}x$$

$$\begin{array}{ll} f(x) = \cos(2x) & f'(x) = -2\sin(2x) \\ g'(x) = e^x & g(x) = e^x \end{array}$$

$$\int e^x\sin(2x)\,\mathrm{d}x = e^x\sin(2x) - 2\left(e^x\cos(2x) + 2\int e^x\sin(2x)\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$= e^x\sin(2x) - 2e^x\cos(2x) - 4\int e^x\sin(2x)\,\mathrm{d}x$$

$$5\int e^x\sin(2x)\,\mathrm{d}x = e^x\sin(2x) - 2e^x\cos(2x) + C$$

$$\int e^x\sin(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}e^x\sin(2x) - \frac{2}{5}e^x\cos(2x) + C$$

Parciális integrálás és az inverz függvények

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x =$$

Parciális integrálás és az inverz függvények

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln x \, \mathrm{d}x = (\ln x)x - \int \frac{1}{x} x \, \mathrm{d}x = x \ln x - \int 1 \, \mathrm{d}x = x \ln x - x + C$$

$$\begin{array}{ll} f(x) = \ln x & f'(x) = \frac{1}{x} \\ g'(x) = 1 & g(x) = x \end{array}$$

Parciális integrálás és az inverz függvények

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln x \, \mathrm{d}x = (\ln x)x - \int \frac{1}{x} x \, \mathrm{d}x = x \ln x - \int 1 \, \mathrm{d}x = x \ln x - x + C$$

$$\begin{array}{ll} f(x) = \ln x & f'(x) = \frac{1}{x} \\ g'(x) = 1 & g(x) = x \end{array}$$

$$\int x \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x =$$

Parciális integrálás és az inverz függvények

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln x \, \mathrm{d}x = (\ln x)x - \int \frac{1}{x} x \, \mathrm{d}x = x \ln x - \int 1 \, \mathrm{d}x = x \ln x - x + C$$

$$\begin{array}{ll} f(x) = \ln x & f'(x) = \frac{1}{x} \\ g'(x) = 1 & g(x) = x \end{array}$$

$$\int x \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x \frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{x^2+1} \frac{x^2}{2} \, \mathrm{d}x = \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x^2+1} \, \mathrm{d}x$$

$$\begin{array}{ll} f(x) = \operatorname{arctg} x & f'(x) = \frac{1}{x^2+1} \\ g'(x) = x & g(x) = \frac{x^2}{2} \end{array}$$

$$\int \frac{x^2}{x^2+1} \, \mathrm{d}x = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} \, \mathrm{d}x = \int 1 - \frac{1}{x^2+1} \, \mathrm{d}x = x - \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int x \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x = \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x^2+1} \, \mathrm{d}x = \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{2} - \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{arctg} x}{2} + C$$

Egy kérdés

$$\int \frac{1}{x}\frac{1}{\ln x}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln x}\ln x - \int -\frac{1}{(\ln x)^2}\frac{1}{x}\ln x\ \mathrm{d}x = 1 + \int \frac{1}{x}\frac{1}{\ln x}\ \mathrm{d}x$$

$f(x) = \dfrac{1}{\ln x} \quad f'(x) = -\dfrac{1}{(\ln x)^2}\dfrac{1}{x}$

$g'(x) = \dfrac{1}{x} \qquad g(x) = \ln x$

Tehát

$$0 = 1$$

Egy kérdés

$$\int \frac{1}{x}\frac{1}{\ln x}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln x}\ln x - \int -\frac{1}{(\ln x)^2}\frac{1}{x}\ln x\ \mathrm{d}x = 1 + \int \frac{1}{x}\frac{1}{\ln x}\ \mathrm{d}x$$

$f(x) = \dfrac{1}{\ln x} \quad f'(x) = -\dfrac{1}{(\ln x)^2}\dfrac{1}{x}$

$g'(x) = \dfrac{1}{x} \qquad g(x) = \ln x$

Tehát

$$0 = 1$$

A hiba az integrációs konstans $(+C)$ elhanyagolása.

Egyébként:

$$\int \frac{1}{x}\frac{1}{\ln x}\ \mathrm{d}x = \ln|\ln x| + C$$

Amikor nem jelenik meg a belső függvény deriváltja

$$\int \sin\left(\sqrt{x}\right) \mathrm{d}x = \int \sin(u) 2u \ \mathrm{d}u = 2 \int u \sin(u) \ \mathrm{d}u$$

Az új változó: $u = \sqrt{x}$
A régi változót kifejezzük az újjal: $u^2 = x$
Lederiváljuk: $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = 2u$
Átrendezve: $\mathrm{d}x = 2u \ \mathrm{d}u$

Parciális integrálással folytatjuk:

$$\int u \sin(u) \ \mathrm{d}u = u(-\cos u) - \int -\cos u \ \mathrm{d}u = -u \cos u + \sin u + C$$

$$\begin{array}{ll} f(u) = u & f'(u) = 1 \\ g'(u) = \sin u & g(u) = -\cos u \end{array}$$

A végeredménybe még az eredeti változót is vissza kell írni:

$$\int \sin\left(\sqrt{x}\right) \ \mathrm{d}x = 2 \int u \sin(u) \ \mathrm{d}u = -2u \cos u + 2 \sin u + C =$$
$$= -2\sqrt{x} \cos\left(\sqrt{x}\right) + 2 \sin\left(\sqrt{x}\right) + C$$

Második helyettesítési szabály

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(g(u))g'(u)\,\mathrm{d}u,$$

ahol $x = g(u)$ monoton függvény.

Példa:

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x =$$

Második helyettesítési szabály

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = \int f(g(u))g'(u)\ \mathrm{d}u,$$

ahol $x = g(u)$ monoton függvény.

Példa:

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\ \mathrm{d}x = \int \frac{u^2}{1+u}\frac{1}{u}\ \mathrm{d}u = \int \frac{u}{1+u}\ \mathrm{d}u =$$

$u = e^x \rightsquigarrow x = \ln u$, így $g(u) = \ln u$, melynek deriváltja: $g'(u) = \frac{1}{u}$
(Vagy: $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{u} \rightsquigarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{u}\mathrm{d}u$)

Ez egy polinomosztás:

$$= \int \frac{1+u-1}{1+u}\ \mathrm{d}u = \int 1 - \frac{1}{1+u}\ \mathrm{d}u = u - \ln(1+u) + C =$$

Végül visszaírjuk az eredeti változót:

$$= e^x - \ln\left(1+e^x\right) + C$$

Néhány ismert példa

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x =$$

Néhány ismert példa

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos u}\cos u\ \mathrm{d}u = \int 1\ \mathrm{d}u = u + C = \arcsin x + C$$

$x = \sin u\ \ \left(u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) \rightsquigarrow u = \arcsin x$

$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \cos u \rightsquigarrow \mathrm{d}x = \cos u\ \mathrm{d}u$

Néhány ismert példa

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos u} \cos u\ \mathrm{d}u = \int 1\ \mathrm{d}u = u + C = \arcsin x + C$$

$x = \sin u\ \ \left(u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) \rightsquigarrow u = \arcsin x$
$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \cos u \rightsquigarrow \mathrm{d}x = \cos u\ \mathrm{d}u$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ \mathrm{d}x =$$

Néhány ismert példa

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos u}\cos u\,\mathrm{d}u = \int 1\,\mathrm{d}u = u + C = \arcsin x + C$$

$x = \sin u \ \left(u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) \rightsquigarrow u = \arcsin x$
$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \cos u \rightsquigarrow \mathrm{d}x = \cos u\,\mathrm{d}u$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\operatorname{ch} u}\operatorname{ch} u\,\mathrm{d}u = \int 1\,\mathrm{d}u = u + C = \operatorname{arsh} x + C$$

$x = \operatorname{sh} u$, és így $\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u} = \operatorname{ch} u$
$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \operatorname{ch} u \rightsquigarrow \mathrm{d}x = \operatorname{ch} u\,\mathrm{d}u$

Néhány ismert példa

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos u}\cos u\ \mathrm{d}u = \int 1\ \mathrm{d}u = u + C = \arcsin x + C$$

$x = \sin u\ \ \left(u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) \rightsquigarrow u = \arcsin x$
$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \cos u \rightsquigarrow \mathrm{d}x = \cos u\ \mathrm{d}u$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\operatorname{ch} u}\operatorname{ch} u\ \mathrm{d}u = \int 1\ \mathrm{d}u = u + C = \operatorname{arsh} x + C$$

$x = \operatorname{sh} u$, és így $\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u} = \operatorname{ch} u$
$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \operatorname{ch} u \rightsquigarrow \mathrm{d}x = \operatorname{ch} u\ \mathrm{d}u$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\ \mathrm{d}x =$$

Néhány ismert példa

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos u}\cos u\ \mathrm{d}u = \int 1\ \mathrm{d}u = u + C = \arcsin x + C$$

$x = \sin u \ \ (u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]) \rightsquigarrow u = \arcsin x$

$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \cos u \rightsquigarrow \mathrm{d}x = \cos u\ \mathrm{d}u$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\operatorname{ch} u}\operatorname{ch} u\ \mathrm{d}u = \int 1\ \mathrm{d}u = u + C = \operatorname{arsh} x + C$$

$x = \operatorname{sh} u$, és így $\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u} = \operatorname{ch} u$

$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \operatorname{ch} u \rightsquigarrow \mathrm{d}x = \operatorname{ch} u\ \mathrm{d}u$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\operatorname{sh} u}\operatorname{sh} u\ \mathrm{d}u = \int 1\ \mathrm{d}u = u + C = \operatorname{arch} x + C$$

$x = \operatorname{ch} u \ \ (u \geq 0)$, és így $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 u - 1} = \operatorname{sh} u$

$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \operatorname{sh} u \rightsquigarrow \mathrm{d}x = \operatorname{sh} u\ \mathrm{d}u$