20. előadás

Határozott integrál alkalmazásai

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2024. november 27.

Függvénygrafikon ívhossza

Adott egy $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, a grafikonjának az ívhosszát szeretnénk meghatározni.

Ha felosztjuk az intervallumot:

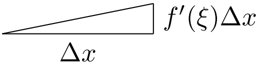
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

akkor az ezekhez tartozó töröttvonal hosszával közelíthetjük az ívhosszat.

Az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumhoz tartozó szakasz meredekségét egy belső $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ pontbeli derivált megadja (Lagrange-tétel).

Ha az intervallum hossza Δx, akkor a függvény emelkedése $f'(\xi)\Delta x$, és ekkor az átfogó hossza:

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (f'(\xi)\Delta x)^2} = \sqrt{1 + (f'(\xi))^2}\Delta x$$

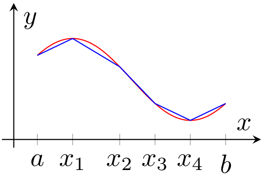


Ezek összege

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}(x_i - x_{i-1}),$$

melynek határértéke

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

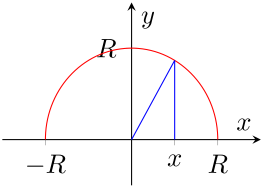


Félkör ívhossza

Az $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény grafikonjának ívhossza

$$\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

Példa: félkör ívhossza/kerülete



$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{R^2-x^2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

Így az ívhossz:

$$L = \int_{-R}^{R} \sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} \sqrt{\frac{R^2-x^2}{R^2-x^2}+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-R}^{R} \sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{R^2}}}\,\mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[R\arcsin\left(\frac{x}{R}\right)\right]_{-R}^{R} = R\arcsin 1 - R\arcsin(-1) = R\frac{\pi}{2} - R\left(-\frac{\pi}{2}\right) = R\pi$$

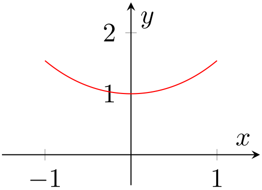
Láncgörbe ívhossza

Legyen

$$f(x) = \operatorname{ch} x \qquad x \in [-1, 1]$$

láncgörbe.

Határozzuk meg az ívhosszát!



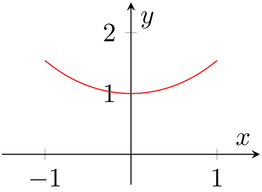
Láncgörbe ívhossza

Legyen

$$f(x) = \operatorname{ch} x \qquad x \in [-1, 1]$$

láncgörbe.

Határozzuk meg az ívhosszát!



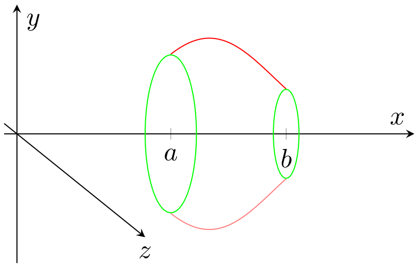
$f'(x) = \operatorname{sh} x$, és így az ívhossz:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}\; \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \operatorname{ch} x \; \mathrm{d}x = [\operatorname{sh} x]_{-1}^{1} = \operatorname{sh}(1) - \operatorname{sh}(-1) = 2\operatorname{sh}(1) =$$

$$= 2\frac{e - e^{-1}}{2} = e - \frac{1}{e} \approx 2{,}35$$

Forgástestek

Adott egy $f(x)$ függvény, mely csak nemnegatív értékeket vesz fel.
Ennek grafikonját az x tengely körül megforgatjuk (térben).
Így egy forgásfelületet kapunk.



Példák:

$f(x) = c$ ekkor egy hengert kapunk

$f(x) = ax$ ekkor egy kúpot vagy csonkakúpot kapunk

$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ egy gömb

Forgástestek térfogata

Itt is felosztjuk az intervallumot, és egy Δx hosszú intervallumhoz tartozó forgástest darabka térfogatát egy közbülső, $f(\xi)$ sugarú, Δx magasságú henger térfogatával, azaz $f^2(\xi)\pi\Delta x$-szel közelítjük. Ezek összege:

$$\sum_{i=1}^{n} f^2(\xi_i)\pi(x_i - x_{i-1}) \to \int_a^b f^2(x)\pi \, \mathrm{d}x$$

Az $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény grafikonjának x tengely körül való forgatásával kapott forgástest térfogata:

$$\pi \int_a^b f^2(x) \, \mathrm{d}x$$

Példa:
$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ félkörív körbeforgatásával kapott gömb térfogata:

Forgástestek térfogata

Itt is felosztjuk az intervallumot, és egy Δx hosszú intervallumhoz tartozó forgástest darabka térfogatát egy közbülső, $f(\xi)$ sugarú, Δx magasságú henger térfogatával, azaz $f^2(\xi)\pi\Delta x$-szel közelítjük. Ezek összege:

$$\sum_{i=1}^{n} f^2(\xi_i)\pi(x_i - x_{i-1}) \to \int_a^b f^2(x)\pi \, \mathrm{d}x$$

Az $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény grafikonjának x tengely körül való forgatásával kapott forgástest térfogata:

$$\pi \int_a^b f^2(x) \, \mathrm{d}x$$

Példa:
$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ félkörív körbeforgatásával kapott gömb térfogata:

$$V = \pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int_{-R}^{R} R^2 - x^2 \, \mathrm{d}x = \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-R}^{R} =$$

$$= \pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} - \left(-R^3 - \frac{(-R)^3}{3} \right) \right) = \frac{4\pi}{3} R^3$$

Forgástestek felszíne

Csak a palást felszínét számoljuk, az alapkörök területét nem.

Egy Δx hosszú intervallumhoz tartozó forgástest darabka felszínét egy közbülső, kb. $f(\xi)$ sugarú, Δx magasságú csonkakúp palástfelszínével, azaz $2\pi f(\xi)\sqrt{1+(f'(\xi))^2}\Delta x$-szel közelítjük. Ezek összege:

$$\sum_{i=1}^{n} 2\pi f(\xi_i)\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}(x_i - x_{i-1}) \to \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

Az $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény grafikonjának x tengely körül való forgatásával kapott forgástest felszíne:

$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

Példa:
$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ félkörív körbeforgatásával kapott gömb felszíne:

Forgástestek felszíne

Csak a palást felszínét számoljuk, az alapkörök területét nem.

Egy Δx hosszú intervallumhoz tartozó forgástest darabka felszínét egy közbülső, kb. $f(\xi)$ sugarú, Δx magasságú csonkakúp palástfelszínével, azaz $2\pi f(\xi)\sqrt{1+(f'(\xi))^2}\Delta x$-szel közelítjük. Ezek összege:

$$\sum_{i=1}^{n} 2\pi f(\xi_i)\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}(x_i - x_{i-1}) \to \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

Az $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény grafikonjának x tengely körül való forgatásával kapott forgástest felszíne:

$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

Példa:
$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ félkörív körbeforgatásával kapott gömb felszíne:

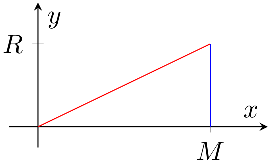
$$A = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2 + x^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2\pi \int_{-R}^{R} R\,\mathrm{d}x = 2\pi [Rx]_{-R}^{R} = 2\pi\left(R^2 - \left(-R^2\right)\right) = 4\pi R^2$$

Kúp térfogata és felszíne

Az R sugarú körlap alapú,
M magasságú kúpot az alábbi
függvény megforgatásával kapjuk meg:

$$f(x) = \frac{R}{M}x \qquad x \in [0, M]$$

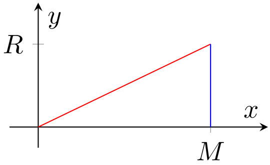


Ennek térfogata:

Kúp térfogata és felszíne

Az R sugarú körlap alapú,
M magasságú kúpot az alábbi
függvény megforgatásával kapjuk meg:

$$f(x) = \frac{R}{M}x \qquad x \in [0, M]$$



Ennek térfogata:

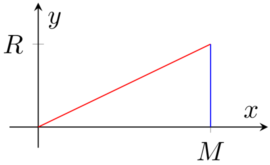
$$V = \pi \int_0^M \left(\frac{R}{M}x\right)^2 \, \mathrm{d}x = \pi \frac{R^2}{M^2} \int_0^M x^2 \, \mathrm{d}x = \pi \frac{R^2}{M^2} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^M =$$

$$= \pi \frac{R^2}{M^2} \frac{M^3}{3} = \frac{R^2 M \pi}{3}$$

Kúp térfogata és felszíne

Az R sugarú körlap alapú,
M magasságú kúpot az alábbi
függvény megforgatásával kapjuk meg:

$$f(x) = \frac{R}{M}x \qquad x \in [0, M]$$



Ennek térfogata:

$$V = \pi \int_0^M \left(\frac{R}{M}x\right)^2 \,\mathrm{d}x = \pi \frac{R^2}{M^2} \int_0^M x^2 \,\mathrm{d}x = \pi \frac{R^2}{M^2} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^M =$$

$$= \pi \frac{R^2}{M^2} \frac{M^3}{3} = \frac{R^2 M \pi}{3}$$

A függvény deriváltja: $f'(x) = \frac{R}{M}$, és ezzel a felszíne:

$$A = 2\pi \int_0^M \frac{R}{M} x \sqrt{1 + \left(\frac{R}{M}\right)^2} \,\mathrm{d}x = 2\pi \frac{R}{M} \sqrt{\frac{M^2 + R^2}{M^2}} \int_0^M x \,\mathrm{d}x =$$

$$= 2\pi \frac{R}{M} \frac{\sqrt{M^2 + R^2}}{M} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^M = 2\pi \frac{R\sqrt{M^2 + R^2}}{M^2} \frac{M^2}{2} = \pi R \sqrt{M^2 + R^2}$$