Készülés a 2. zh-ra

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2024. november 19.

Feladatok

1. Írjuk fel az $f(x) = x\ln(x^3-7)$ függvény érintőjét az $x_0 = 2$ pontban.
2. Írjuk fel az $f(x) = \dfrac{x}{x^2+3}$ függvény $x_0 = 0$ körüli negyedfokú Taylor-polinomját.
3. $$\lim_{x\to 2} \frac{e^{2-x}-1}{x-2} = ?$$
4. Egy teherautóval szeretnénk elszállítani az árunkat a 100 km-re levő raktárból. Ha v km/h sebességgel megyünk, akkor a teherautó fogyasztása $\dfrac{v^2}{54}$ forint kilométerenként. Ezen kívül a vezető órabére 8000 forint (óránként). Mekkora sebességgel hajtsuk a teherautót, hogy a költségünk minimális legyen?
5. Végezzük el az $f(x) = \dfrac{2x^2+8}{x}$ függvény teljes függvényvizsgálatát (értelmezési tartomány, zérushely, paritás, periodicitás, határértékek, aszimptoták, monotonitás, lokális szélsőértékek, konvexitás, ábrázolás, értékkészlet).

1. feladat megoldása

Írjuk fel az $f(x) = x\ln(x^3 - 7)$ függvény érintőjét az $x_0 = 2$ pontban.

A függvény egy szorzat, így a deriváltja:

$$f'(x) = \ln(x^3 - 7) + x\frac{1}{x^3 - 7} \cdot 3x^2 = \ln(x^3 - 7) + \frac{3x^3}{x^3 - 7}$$

Ennek az $x_0 = 2$ pontban az értéke:

$$f'(2) = \ln(8 - 7) + \frac{24}{1} = 0 + 24 = 24$$

A függvény értéke $x_0 = 2$-ben:

$$f(2) = 2\ln(8 - 7) = 0$$

Így az érintő egyenlete:

$$y = 24(x - 2) + 0$$
$$y = 24x - 48$$

2. feladat megoldása

Írjuk fel az $f(x) = \dfrac{x}{x^2+3}$ függvény $x_0 = 0$ körüli negyedfokú Taylor-polinomját.

Felhasználjuk, hogy

$$\frac{1}{1-x} \approx \sum_{k=0}^{n} x^k.$$

$$\frac{x}{x^2+3} = \frac{x}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{3}} = \frac{x}{3} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{x^2}{3}\right)} \approx \frac{x}{3} \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{x^2}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{3^{k+1}} x^{2k+1} =$$
$$= \frac{x}{3} - \frac{x^3}{9} + \frac{x^5}{27} - \cdots + \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} x^{2n+1}$$

Így a negyedfokú Taylor-polinom

$$\frac{x}{3} - \frac{x^3}{9}.$$

3. feladat megoldása

$$\lim_{x\to 2} \frac{e^{2-x}-1}{x-2} = ?$$

Mivel a számláló és a nevező is nullához tart, alkalmazhatjuk a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{x\to 2} \frac{e^{2-x}(-1)}{1} = \lim_{x\to 2} -e^{2-x} = -e^0 = -1$$

Így

$$\lim_{x\to 2} \frac{e^{2-x}-1}{x-2} = -1$$

4. feladat megoldása

Egy teherautóval szeretnénk elszállítani az árunkat a 100 km-re levő raktárból. Ha v km/h sebességgel megyünk, akkor a teherautó fogyasztása $\frac{v^2}{54}$ forint kilométerenként. Ezen kívül a vezető órabére 8000 forint (óránként). Mekkora sebességgel hajtsuk a teherautót, hogy a költségünk minimális legyen?

Ha v sebességgel haladunk, akkor $\frac{100}{v}$ óra alatt jutunk célba, így az összes költségünk:

$$f(v) = \frac{v^2}{54} \cdot 100 + \frac{100}{v} \cdot 8000 = \frac{50v^2}{27} + \frac{800000}{v}$$

Ha $v = 0$, akkor egyrészt nem érünk célba, másrészt pedig a vezető órabére az egekbe szökik:

$$\lim_{v \to 0+} f(v) = +\infty$$

Ha v nagyon nagy, akkor (megbüntetnek gyorshajtásért és) a fogyasztás lesz nagyon sok:

$$\lim_{v \to \infty} f(v) = +\infty$$

4. feladat megoldásának folytatása

$$f(v) = \frac{50v^2}{27} + \frac{800000}{v}$$

Nézzük, hogy van-e szélsőérték!

$$f'(v) = \frac{100v}{27} - \frac{800000}{v^2}$$

Ennek nullhelye:

$$\begin{aligned}
\frac{100v}{27} - \frac{800000}{v^2} &= 0 \\
\frac{100v}{27} &= \frac{800000}{v^2} \\
v^3 &= \frac{800000 \cdot 27}{100} \\
v &= \sqrt[3]{8000 \cdot 27} = 60
\end{aligned}$$

A második derivált:

$$f''(v) = \frac{100}{27} + \frac{2 \cdot 800000}{v^3} = \frac{100}{27} + \frac{1600000}{v^3} > 0,$$

ha v pozitív, így $v = 60$-ban lokális minimum van.
Tehát 60 km/h sebességgel kell haladnunk.

5. feladat megoldása

Végezzük el az $f(x) = \dfrac{2x^2+8}{x}$ függvény teljes függvényvizsgálatát (értelmezési tartomány, zérushely, paritás, periodicitás, határértékek, aszimptoták, monotonitás, lokális szélsőértékek, konvexitás, ábrázolás, értékkészlet).

ÉT: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

zérushely: nincs, mert $2x^2 + 8 > 0$

paritás: páratlan:

$$f(-x) = \frac{2(-x)^2+8}{-x} = -\frac{2x^2+8}{x} = -f(x)$$

periódus: nincs (pl. ÉT miatt)

5. feladat megoldásának folytatása

Határértékek:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+8}{x} = \lim_{x\to\infty} 2x + \frac{8}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+8}{x} = \lim_{x\to-\infty} 2x + \frac{8}{x} = -\infty$$

Megnézzük, hogy van-e ferde aszimptota a $+\infty$-ben:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2+8}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+8}{x^2} = \lim_{x\to\infty} 2 + \frac{8}{x^2} = 2$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+8}{x} - 2x = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+8-2x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{8}{x} = 0$$

Tehát a $+\infty$-ben az aszimptota egyenlete: $y = 2x$.
Hasonlóan a $-\infty$-ben is $y = 2x$ az aszimptota egyenlete.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{2x^2+8}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{8}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0-} \frac{2x^2+8}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{8}{x} = -\infty$$

Tehát az $x = 0$ függőleges aszimptota.

5. feladat megoldásának folytatása

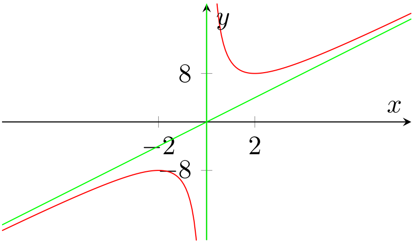
$$f'(x) = \frac{4x \cdot x - (2x^2+8)\cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2-8}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{4x \cdot x^2 - (2x^2-8)\cdot 2x}{x^4} = \frac{16x}{x^4} = \frac{16}{x^3}$$

Az első derivált $2x^2-8=0$, azaz $x=\pm 2$ esetén nulla.
A második deriváltnak nincs nullhelye.

	$x<-2$	-2	$-2<x<0$	0	$0<x<2$	2	$2<x$
f'	$+$ mon. nő	0 max.	$-$ mon. csök.	n. é. n. é.	$-$ mon. csök.	0 min.	$+$ mon. nő
f''		$-$ konkáv		n. é. n. é.		$+$ konvex	

lokális maximum értéke: $f(-2)=-8$
lokális minimum értéke: $f(2)=8$.



ÉK: $(-\infty,-8]\cup[8,+\infty)$