10. gyakorlat

Határozatlan integrálok

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2024. november 14.

1. feladat (a)

Keressük meg azt az f függvényt, amelyre $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ és $f(4) = 1$ teljesül.

1. feladat (a)

Keressük meg azt az f függvényt, amelyre $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ és $f(4) = 1$ teljesül.

A derivált függvényből $f(x) = \sqrt{x} + C$, mert
$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Másrészt $1 = f(4) = \sqrt{4} + C = 2 + C$, azaz $C = -1$.

Így $f(x) = \sqrt{x} - 1$.

1. feladat (b)

Keressük meg azt az f függvényt, amelyre $f''(x) = 3e^x + 5\sin x$ és $f(0) = 1,\ f'(0) = 2$ teljesül.

1. feladat (b)

Keressük meg azt az f függvényt, amelyre $f''(x) = 3e^x + 5\sin x$ és $f(0) = 1,\ f'(0) = 2$ teljesül.

Először a függvény derivált függvényét határozzuk meg, melynek ismerjük a deriváltját ($f''(x)$-et). Így

$$f'(x) = 3e^x - 5\cos x + C_1,$$

továbbá

$$2 = f'(0) = 3e^0 - 5\cos(0) + C_1 = 3 - 5 + C_1 = -2 + C_1,$$

amiből $C_1 = 4$. Tehát

$$f'(x) = 3e^x - 5\cos x + 4.$$

Innen a függényt hasonlóan meghatározhatjuk:

$$f(x) = 3e^x - 5\sin x + 4x + C_2,$$

és így $1 = f(0) = 3 - 0 + 0 + C_2$, azaz $C_2 = -2$, azaz

$$f(x) = 3e^x - 5\sin x + 4x - 2.$$

2. feladat (a)

Számítsuk ki a $\int x^2 + 2x - 3\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

2. feladat (a)

Számítsuk ki a $\int x^2 + 2x - 3\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

Tulajdonképpen az a kérdés, hogy melyik függvényt deriválva kapjuk ezt a polinomot. Könnyen kitalálhatjuk:

$$\int x^2 + 2x - 3\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + C$$

2. feladat (b)

Számítsuk ki a $\int \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

2. feladat (b)

Számítsuk ki a $\int \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

Az integrál linearitása mellett azt használjuk, hogy $\int x^n\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ tetszőleges $n \neq -1$-re (nemcsak az egészekre).

$$\int \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$$

2. feladat (c)

Számítsuk ki a $\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

2. feladat (c)

Számítsuk ki a $\displaystyle\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

$$\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2+2x+1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + 2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C$$

3. feladat (a)

Lineáris helyettesítéssel számoljuk ki a $\int (x+4)^3 \, \mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

3. feladat (a)

Lineáris helyettesítéssel számoljuk ki a $\int (x+4)^3 \, \mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

Lineáris helyettesítés:
Ha az $f(x)$ függvény primitív függvénye $F(x)$, akkor

$$\int f(ax+b) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$$

Mivel $\int x^3 \, \mathrm{d} = \frac{x^4}{4} + C$, és $a = 1, b = 4$, így

$$\int (x+4)^3 \, \mathrm{d}x = \frac{(x+4)^4}{4} + C$$

3. feladat (b)

Lineáris helyettesítéssel számoljuk ki a $\int e^{5x}\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

3. feladat (b)

Lineáris helyettesítéssel számoljuk ki a $\int e^{5x}\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

Lineáris helyettesítés:
Ha az $f(x)$ függvény primitív függvénye $F(x)$, akkor

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$$

Most $a=5, b=0$, és az e^x függvény primitív függvénye önmaga, így

$$\int e^{5x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}e^{5x}+C$$

3. feladat (c)

Lineáris helyettesítéssel számoljuk ki a $\int \frac{1}{3x-6}\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

3. feladat (c)

Lineáris helyettesítéssel számoljuk ki a $\int \frac{1}{3x-6}\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

Lineáris helyettesítés:
Ha az $f(x)$ függvény primitív függvénye $F(x)$, akkor

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$$

Most $a=3, b=6$, és $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x|+C$, így

$$\int \frac{1}{3x-6}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln|3x-6|+C$$

Másik lehetőség:

$$\int \frac{1}{3x-6}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln|x-2|+C$$

A két logaritmus csak konstansban ($\ln 3$) tér el.

4. feladat (a)

Határozzuk meg a $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5}\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

4. feladat (a)

Határozzuk meg a $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5}\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

Ennél a feladatnál a $\int f'(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = f(g(x)) + C$ szabályt alkalmazzuk.

Mivel $\left(e^{3x}+5\right)' = 3e^{3x}$, így $g(x) = e^{3x}+5$ függvényt választva alkalmazhatjuk a szabályt, ha 3-mal bővítünk:

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{1}{e^{3x}+5} 3e^{3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln\left(e^{3x}+5\right) + C$$

4. feladat (b)

Határozzuk meg a $\int x^3(4x^4+6)^{2024}\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

4. feladat (b)

Határozzuk meg a $\int x^3(4x^4+6)^{2024}\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

Ennél a feladatnál is a $\int f'(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = f(g(x)) + C$ szabályt alkalmazzuk.

Itt $g(x) = 4x^4 + 6$, melynek deriváltja: $g'(x) = 4 \cdot 4x^3 = 16x^3$, így 16-tal bővítünk:

$$\begin{aligned}\int x^3(4x^4+6)^{2024}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{16}\int 16x^3(4x^4+6)^{2024}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{16}\cdot\frac{(4x^4+6)^{2025}}{2025} + C = \\ &= \frac{(4x^4+6)^{2025}}{32400} + C\end{aligned}$$

4. feladat (c)

Határozzuk meg a $\int \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{(\mathrm{tg} x)^3}} \, \mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

4. feladat (c)

Határozzuk meg a $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x\sqrt{(\mathrm{tg}x)^3}}\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

Ennél a feladatnál is a $\displaystyle\int f'(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = f(g(x)) + C$ szabályt alkalmazzuk.

Mivel $(\mathrm{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, így a tangens a belső függvény:

$$\int \frac{1}{\cos^2 x\sqrt{(\mathrm{tg}x)^3}}\,\mathrm{d}x = \int (\mathrm{tg}x)'(\mathrm{tg}x)^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{(\mathrm{tg}x)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = -\frac{2}{\sqrt{\mathrm{tg}x}} + C$$

5. feladat (a)

Határozzuk meg a $\displaystyle\int \frac{x^2+x-2}{x-3}\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

5. feladat (a)

Határozzuk meg a $\int \frac{x^2+x-2}{x-3}\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

Mivel a számlálóban magasabb fokú polinom áll, mint a nevezőben, így polinomosztást végzünk:

$$x^2+x-2=(x-3)(x+4)+10$$

Így:

$$\int \frac{x^2+x-2}{x-3}\,\mathrm{d}x=\int \frac{(x-3)(x+4)+10}{x-3}\,\mathrm{d}x=\int x+4+\frac{10}{x-3}\,\mathrm{d}x=$$
$$=\frac{x^2}{2}+4x+10\ln|x-3|+C$$

5. feladat (b)

Határozzuk meg a $\int \frac{x+2}{2x^2+5}\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

5. feladat (b)

Határozzuk meg a $\displaystyle\int \frac{x+2}{2x^2+5}\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált.

Először szétszedjük két integrállá:

$$\int \frac{x+2}{2x^2+5}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{2x^2+5}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2}{2x^2+5}\,\mathrm{d}x$$

Az elsőt az első helyettesítési szabállyal számoljuk ki:

$$\int \frac{x}{2x^2+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{1}{2x^2+5}4x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln(2x^2+5)+C$$

A másodikhoz lineáris helyettesítést végzünk:

$$\int \frac{2}{2x^2+5}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}\int \frac{1}{\frac{2x^2}{5}+1}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}\int \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{2}{5}}x\right)^2+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2}{5}\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{5}}}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{5}}x\right)+C = \sqrt{\frac{2}{5}}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{5}}x\right)+C$$

Tehát: $\displaystyle\int \frac{x+2}{2x^2+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln(2x^2+5)+\sqrt{\frac{2}{5}}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{5}}x\right)+C$

Opcionális feladat

$$\int \frac{2}{x^2 - 9} \, \mathrm{d}x = ?$$

Házi feladatok

1. $\displaystyle\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x = ?$
2. Melyik az az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, melyre $f''(x) = \cos(3x)$ és $f(0) = 1$ és $f'(0) = 6$?
3. Melyik az az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, melyre $f'(x) = 5xe^{5x^2}$ és $f(0) = 1$?

Házi feladatok megoldása

1. $\dfrac{8}{15}x^{\frac{15}{8}} + C$ (felhasználva, hogy $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} = x^{\frac{7}{8}}$).
2. $f(x) = -\dfrac{\cos(3x)}{9} + 6x + \dfrac{10}{9}$.
3. $f(x) = \dfrac{1+e^{5x^2}}{2}$.