12. gyakorlat

Határozott integrál alkalmazásai

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2024. december 5.

1. feladat

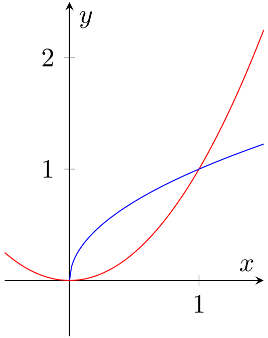
Határozzuk meg az $f(x) = x^2$ és a $g(x) = \sqrt{x}$ függvények grafikonjai által közrezárt síkidom területét.

1. feladat

Határozzuk meg az $f(x) = x^2$ és a $g(x) = \sqrt{x}$ függvények grafikonjai által közrezárt síkidom területét.

A két grafikon metszéspontjainak x koordinátái az $x^2 = \sqrt{x}$ egyenlet megoldásai, azaz 0 és 1.
A közrezárt síkidom területe a két görbe alatti terület különbsége:

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{x} - x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

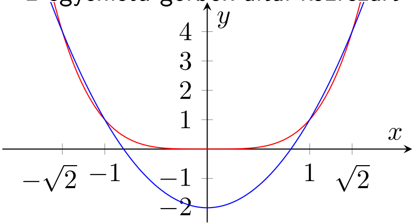


2. feladat

Határozzuk meg az $y = x^4$ és az $y = 3x^2 - 2$ egyenletű görbék által közrezárt síkidom területét.

2. feladat

Határozzuk meg az $y = x^4$ és az $y = 3x^2 - 2$ egyenletű görbék által közrezárt síkidom területét.



A metszéspont meghatározása:

$$x^4 = 3x^2 - 2$$

$$x^4 - 3x^2 + 2 = 0$$

Ez $t = x^2$-re egy másodfokú egyenlet:

$$t^2 - 3t + 2 = 0,$$

ennek gyökei 1 és 2. Így a metszéspontok x koordinátái: $-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}$.
Három integrált kell kiszámolnunk:
$-\sqrt{2}$ és -1 között; -1 és 1 között; 1 és $\sqrt{2}$ között.

$$\int_1^{\sqrt{2}} 3x^2 - 2 - x^4 \, \mathrm{d}x = \left[x^3 - 2x - \frac{x^5}{5}\right]_1^{\sqrt{2}} = -\frac{4\sqrt{2}}{5} - \left(-\frac{6}{5}\right) = \frac{6 - 4\sqrt{2}}{5}$$

$$\int_{-1}^{1} x^4 - (3x^2 - 2) \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^5}{5} - x^3 + 2x\right]_{-1}^{1} = \frac{6}{5} - \left(-\frac{6}{5}\right) = \frac{12}{5}$$

A szimmetria miatt az első és harmadik megegyezik, így a terület $\dfrac{24 - 8\sqrt{2}}{5}$.

3. feladat

Számítsuk ki az $f(x) = x\sqrt{x},\ 0 \leq x \leq 4$ függvény grafikonjának az ívhosszát.

3. feladat

Számítsuk ki az $f(x) = x\sqrt{x},\ 0 \le x \le 4$ függvény grafikonjának az ívhosszát.
Az f függvény grafikonjának ívhossza a és b között:

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

A feladat esetében $f(x) = x\sqrt{x} = x^{3/2}$, így $f'(x) = \dfrac{3}{2}x^{1/2} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$.
Így az ívhossz (alkalmazva a lineáris helyettesítés szabályát):

$$\int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2}\right]_0^4 =$$
$$= \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right) \approx 9{,}07$$

4. feladat

Határozzuk meg az $f(x) = \sin x, x \in [0, \pi]$ függvény grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával adódó forgástest térfogatát.

4. feladat

Határozzuk meg az $f(x) = \sin x, x \in [0, \pi]$ függvény grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával adódó forgástest térfogatát.

Az $f(x)$ függvény ($x \in [a, b]$) grafikonját x tengely körüli megforgatásával kapott forgásfelület térfogata:

$$\pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

mely a jelen esetben felhasználva a $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$ összefüggést:

$$\pi \int_0^\pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = \pi \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2} \approx 4{,}93$$

5. feladat

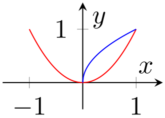
Határozzuk meg a forgási paraboloid alakú váza űrtartalmát és felszínét. A váza alakját az $f(x) = x^2$ $(x \in [-1, 1])$ függvény grafikonjának y tengely körüli forgatásával kapjuk.

5. feladat

Határozzuk meg a forgási paraboloid alakú váza űrtartalmát és felszínét. A váza alakját az $f(x) = x^2$ ($x \in [-1, 1]$) függvény grafikonjának y tengely körüli forgatásával kapjuk.

Áttérve x tengely körüli forgatásra:

$$f(x) = \sqrt{x} \quad (x \in [0, 1])$$



Az űrtartalom a térfogat:

$$V = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{x}\right)^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_0^1 x \,\mathrm{d}x = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$$

És a felszín felhasználva, hogy $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x + \frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x = 2\pi \left[\frac{2}{3}\left(x + \frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 =$$

$$= 2\pi \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{5^{\frac{3}{2}}}{8} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8}\right) = \frac{\left(5\sqrt{5} - 1\right)\pi}{6} \approx 5{,}33$$

Házi feladatok

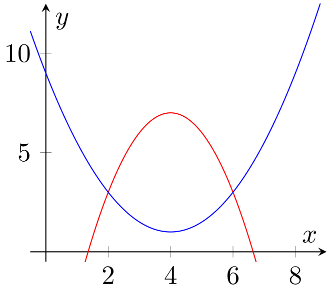
1. Határozzuk meg az $y = -x^2 + 8x - 9$ és az $y = \frac{x^2}{2} - 4x + 9$ egyenletű görbék által közrezárt síkidom területét.
2. Számítsuk ki az $f(x) = \ln\left(1 - x^2\right), x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ függvény grafikonjának az ívhosszát.
3. Határozzuk meg az $f(x) = x - \frac{1}{x}, x \in [1, 3]$ függvény grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával adódó forgástest térfogatát.

Első házi feladat megoldása

Határozzuk meg az $y = -x^2 + 8x - 9$ és az $y = \dfrac{x^2}{2} - 4x + 9$ egyenletű görbék által közrezárt síkidom területét.

Először meghatározzuk a metszéspontok x koordinátáját:

$$\begin{aligned} -x^2 + 8x - 9 &= \frac{x^2}{2} - 4x + 9 \\ 0 &= \frac{3}{2}x^2 - 12x + 18 \\ 0 &= x^2 - 8x + 12 \end{aligned}$$



másodfokú egyenlet megoldásai $x_1 = 2$ és $x_2 = 6$.
E két érték között kell a két függvény különbségét integrálni:

$$\int_2^6 (-x^2 + 8x - 9) - \left(\frac{x^2}{2} - 4x + 9\right) \mathrm{d}x = \int_2^6 -\frac{3}{2}x^2 + 12x - 18 \,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[-\frac{3}{2}\frac{x^3}{3} + 6x^2 - 18x\right]_2^6 = 0 - (-16) = 16$$

Második házi feladat megoldása

Számítsuk ki az $f(x) = \ln\left(1 - x^2\right), x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ függvény grafikonjának az ívhosszát.

Az f függvény grafikonjának ívhossza: $\displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$.

A feladat esetében $f'(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}(-2x) = -\dfrac{2x}{1 - x^2}$.

Először csak az integrandus négyzetét számoljuk ki:

$$1 + \left(f'(x)\right)^2 = 1 + \left(-\frac{2x}{1 - x^2}\right)^2 = \frac{\left(1 - x^2\right)^2}{\left(1 - x^2\right)^2} + \frac{4x^2}{\left(1 - x^2\right)^2} =$$

$$= \frac{1 - 2x^2 + x^4 + 4x^2}{\left(1 - x^2\right)^2} = \frac{1 + 2x^2 + x^4}{\left(1 - x^2\right)^2} = \frac{\left(1 + x^2\right)^2}{\left(1 - x^2\right)^2}$$

Így az ívhossz:

$$L = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 + x^2}{1 - x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-(1 - x^2) + 2}{1 - x^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} -1 + \frac{2}{1 - x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-x + \ln\left|\frac{1 + x}{1 - x}\right|\right]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} + \ln 3 - 0 \approx 0{,}599$$

Harmadik házi feladat megoldása

Határozzuk meg az $f(x) = x - \dfrac{1}{x}, x \in [1,3]$ függvény grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával adódó forgástest térfogatát.

Az $f(x)$ függvény grafikonját x tengely körüli megforgatásával kapott forgásfelület térfogata:

$$\pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

mely a jelen esetben

$$\pi \int_1^3 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_1^3 x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \pi \left[\frac{x^3}{3} - 2x - \frac{1}{x}\right]_1^3 =$$

$$= \pi \left(9 - 6 - \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3} - 2 - 1\right)\right) = \frac{16}{3}\pi \approx 16{,}76$$